EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 88

nr 3

december 2012

Vakdidactisch onderzoek, deel 2

Open lesmateriaal

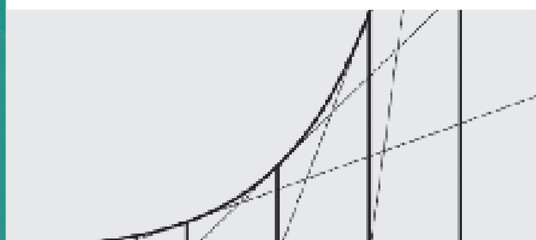
Historische Kring wordt Werkgroep

Wiskundedidactiek

Wiskunde en autisme, deel 2

Jaarrede 2012

e als groeital





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 88

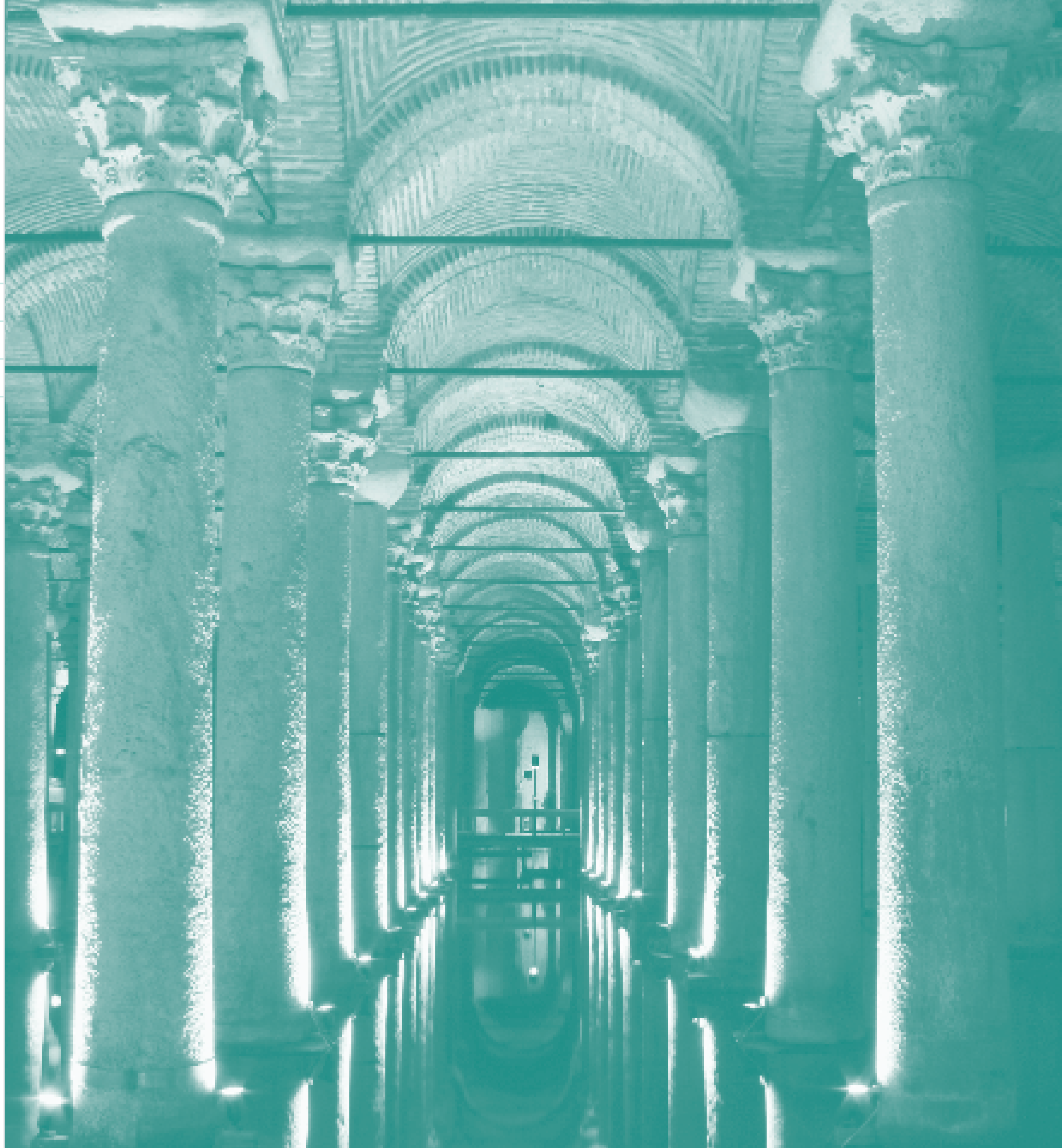
nr 3

december 2012

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394



Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. E. van Dijk

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Marjanne de Nijs]

Verenigingsdag

Met een volle tas kwam ik zaterdag 3 november thuis. Nieuwe rekenboeken, de laatste Zebraboekjes, diverse hand-outs van bijgewoonde workshops … en nog veel meer. Ook het hoofd was vol: tussendoelen, 3F of 3S, nieuwe examenprogramma's, denkactiviteiten … en nog veel meer. Kortom, naast het plezier van ontmoetingen met collega's ook weer een bijzonder nuttige en geslaagde verenigingsdag. Wij gaan u er over bijpraten in *Euclides*. In dit nummer vindt u de openingstoespraak van de voorzitter van de NVvW, Marian Kollenveld. Hierin verwijst ze onder andere naar twee werkgroepen die beide een verslag in dit nummer publiceren. Harm Jan Smid schrijft over de overstap van HKRWO naar WGRWO. En Christiaan Boudri informeert u over de conferentie die de HBO-werkgroep had in het afgelopen voorjaar. In de volgende *Euclides* krijgt u een uitgebreide impressie van de verenigingsdag zelf.

Deze Euclides

Olaf Gosselink en Ton Konings schrijven in een aflevering van 'Klein vakdidactisch onderzoek' over het ontbinden in factoren – met als aanhef 'Waar zijn we eigenlijk mee bezig?'. Ook aandacht voor didactiek in het eerste deel van 'Didactiek? Laat mij maar gewoon lesgeven!' van Anne van Streun en Heiner Wind. Samen geven ze concrete voorbeelden bij de hoofdstukken van het dit jaar uitgekomen *Handboek wiskundedidactiek*.
De basis van de rubriek van Jacques Jansen is deze keer het boekje *Opa is de slimste!*. Collega's en leerlingen daagde hij uit met problemen die dit boekje bevat … een aanrader! In deel 2 van 'Wiskunde en autisme' richten Bram Arens en Danny Beckers zich op het scheiden van hoofd- en bijzaken. Ze geven concrete tips die ook voor een bredere doelgroep bruikbaar zijn. De belevenissen van Erika Bakker tijdens de LIO-stage kunnen we in haar rubriek volgen.
In de digitale hoek komen we gelukkig Marc de Hoog weer tegen die in zijn tweede deel over Google Maps dieper ingaat op de mogelijkheden van dit programma. Lonneke Boels heeft een *app* voor u gerecenseerd en Johan Gademan laat zien wat er op het gebied van digitaal wiskundemateriaal te halen is bij MathUnited.
Voordat de computer zijn intrede deed hadden ingenieurs een handige methode om snel inzicht te krijgen in het gedrag van variabelen met een onderling verband. Danny Beckers schrijft hierover in zijn rubriek 'Getuigen'. Nomografie lijkt een vergeten vakgebied maar ik denk dat het een onderwerp is dat we prima met leerlingen in de klas kunnen behandelen. Ook voor in de les is het artikel van Hessel Pot over het getal e.
Als vanouds natuurlijk een bijdrage van Ton Lecluse en dankzij zijn opgave vorig jaar op de verenigingsdag deze keer ook een buitenlandse inzending: Michael de Villiers uit Zuid-Afrika stuurde nog een oplossing in, en die zullen we u niet onthouden. Ook uit Afrika: een beschrijving van een project dat uitgevoerd kon worden mede door subsidie van het Wereldwiskunde Fonds. Jos Rikers informeert u er over.
Ook de wiskundewedstrijden zijn weer vertegenwoordigd in dit nummer. In de serie *Een jaar W4Kangoeroe* deze keer het derde deel van Ernst Lambeck. Nieuw is dat leerlingen in het vmbo de mogelijkheid hebben om in duo's te werken; na het lezen van dit artikel lijkt me duidelijk hoe succesvol dat kan zijn.
De opgaven van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de uitslag vindt u ook in dit blad. Het geeft samen met de opgaven van onze recreatierubriek weer veel puzzeluitdaging.

Tussendoelen

Door de SLO en cTWO is een document geschreven dat aangeeft wat het eindniveau zou moeten zijn in klas 3 havo/vwo, de tussendoelen genoemd. Deze zullen in het schooljaar 2014-2015 diagnostisch getoetst gaan worden. Op basis van de geformuleerde eindtermen is een constructiegroep van docenten aan de slag gegaan om hierbij voorbeeldopgaven te maken. In een tweedelig artikel, waarvan in dit nummer het eerste, informeren Dédé de Haan en Lambrecht Spijkerboer u er uitgebreid over.

Kerst

En met dit derde nummer van *Euclides* in de bus is het tijd om ons op te maken voor de kerstvakantie. Met hopelijk alle tijd om het hoofd én de *to-do*-lijst leeg te maken – als redactie hopen we dat ons blad u weer inspireert voor nieuwe ideeën en/of activiteiten.
Ik wens u een prettige vakantie en alvast een heel gelukkig 2013.

Inhoud

Klein vakdidactisch onderzoek Algebra

DEEL 2

[Olaf Gosselink en Ton Konings]

Dit artikel is het tweede artikel in een serie van zes over 'klein vakdidactisch onderzoek Algebra'. De artikelen zijn geschreven als afsluiting van een cursus Vakdidactiek Algebra[1] aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen. De deeltijdstudenten, meestal beginnende docenten, schreven een artikel naar aanleiding van ervaringen in de klas. Aan de hand van de bestudeerde theorie analyseerden ze die ervaringen, ze maakten voornemens en konden die soms ook nog uitvoeren. In viertallen becommentarieerden ze elkaars werk. Vijf artikelen werden geselecteerd voor plaatsing in Euclides en werden daartoe in samenwerking met de docent, Ton Konings, nog grondig bewerkt. Daarover meer in het laatste artikel van de serie.

Ontbinden in factoren. Waar zijn we eigenlijk mee bezig?

Probleemsituatie

Het hoofdstuk 'Ontbinden van factoren' in [2] leverde mij en mijn 2-havo/vwo klas het afgelopen schooljaar veel problemen op. Het begon al met het activeren van de voorkennis, het wegwerken van haakjes. De helft van de groep was vergeten hoe het moet. Het ontbinden van een drieterm leverde vaak problemen op, zoals $x^2 - 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$. Het oplossen van vergelijkingen leidde tot fouten als: $x^2 + 4x = 12$ geeft $x(x + 4) = 12$, dus $x = 12$ en $x + 4 = 12$, dus $x = 12$ of $x = 8$. En als de leerlingen uiteindelijk de vergelijking wel hebben opgelost en hun wordt gevraagd 'wat hebben jullie nu uitgerekend', dan weten ze dat vaak niet (meer). Tot slot verzuchten leerlingen: 'Wat is dit saai en waarom moet dit eigenlijk?'

Ik dacht vaak 'Waarom zie je het dan niet, het is toch zo eenvoudig'. Hoe kan het dat ikzelf daar vroeger geen probleem mee had? Ik herinner me niet meer hoe mijn docent het heeft uitgelegd, wel dat hij vaak zei: 'Oefenen, oefenen, oefenen'. Ik kon het wel, maar was ik ook als een kip zonder kop sommetjes aan het maken?

Ik vraag me af waarom dit zo moeilijk is. En wat is eraan te doen? Maar ook: waarom zoveel moeite als de leerlingen in het volgende schooljaar de *abc*-formule krijgen aangereikt. Daarmee is ontbinden in factoren overbodig geworden, toch?

Eerst bespreek ik kort de opbouw van de methode en benoem daarbij nog enkele ervaringen, vervolgens probeer ik vanuit literatuur enige verklaringen en suggesties voor bovenstaande vragen te vinden.

Tot slot maak ik een aantal voornemens voor een volgende keer.

Analyse van de schoolmethode

Om tot een goede aanpak van het probleem te komen, bespreek ik summier het hoofdstuk 10 'Ontbinden in factoren' in *Moderne Wiskunde* en mijn lessen daarover.

- Voorkennis. Voor dit hoofdstuk betekent dat het wegwerken van haakjes. Dit is immers het tegenover gestelde van ontbinden in factoren. De methode gebruikt daarvoor het 'rechthoeksmodel' zoals ***in figuur 1*** en ***in figuur 2*** is weergegeven.
  Ikzelf gaf daarnaast de *papegaaienbek*-methode. Leerlingen vonden dat gemakkelijker.
- §10.1. In de eerste echte paragraaf wordt behandeld hoe je getallen als 360 en uitdrukkingen als 12 × 2 kunt ontbinden.
- §10.2 gaat over het ontbinden in factoren van een tweeterm, op zoek naar de grootste gemeenschappelijke factor.
- §10.3 heeft als titel 'Over A × B = 0'. De voorbeelden ***in figuur 3*** illustreren het idee.
  Een leerling merkte op: 'Waarom staat deze stof tussen het ontbinden van een tweeterm en een drieterm?'. Dat leek mij in eerste instantie een terechte opmerking. Later zal blijken dat deze paragraaf hier op zijn plaats is.
- §10.4 behandelt het ontbinden van een drieterm. De methode geeft het rechthoeksmodel, zoals ***in figuur 4***. Daarmee zoek je naar de twee getallen die samen het product en de som vormen.
  Veel leerlingen kunnen er niet mee uit de voeten. Ik propageerde daarom een plaatje uit een ander deel; ***zie figuur 5***.
- §10.5 gaat over vergelijkingen oplossen. Hier komt al het voorgaande bij elkaar, maar dan zijn al veel leerlingen het spoor bijster. De laatste opgave over de opbrengst $O = 1000p - 200p^2$ als functie van de prijs van een bakje friet en bij welke prijs er geen inkomsten zijn, vond ik een mooie context. Die heb ik dan ook klassikaal besproken.
- §10.6, de laatste paragraaf, bevat de gemengde opdrachten.

Analyse vanuit vakdidactische literatuur

In Faarts et al. (zie [1]) worden oorzaken genoemd van fouten van leerlingen bij het oplossen van vergelijkingen. Daarvan kunnen bij het ontbinden de volgende categorieën herkend worden:

- Reageren op visuele kenmerken van formules – Als geldt:
  $x(x + 4) = 0$, dus $x = 0$ of $x = 4$
  dan zal ook wel:
  $x(x + 4) = 12$, dus $x = 12$ of $x + 4 = 12$, dus $x = 4$ of $x = 8$
- Gebrek aan betekenis van algebraïsche uitdrukkingen – Juist het rechthoeksmodel wordt genoemd als ondersteuning voor het begrip van het ontbinden in factoren. Als daar geen goede basis voor is gelegd bij het wegwerken van haakjes, werkt dat model niet. *Moderne Wiskunde* hanteert dit rechthoeksmodel. Collega's en ook ikzelf negeren dat vaak, omdat de 'papegaaienbek' zo handig is, maar eigenlijk is dat veelal een onbegrepen trucje.
- Gebrek aan overzicht – Dat begint bij het oplossen van vergelijkingen met 'Wat ben je aan het doen?' / Zoeken naar een getal waarvoor het klopt. Als

dat met proberen snel lukt, heb je geluk gehad. Anders moeten er slimmere methoden komen. Welke vormen zijn er zoal? Daarnaast geeft de koppeling aan grafieken meer inzicht.

- Gebrek aan flexibiliteit – Als ze bijvoorbeeld bij $(x-4)(x+4)=0$ beginnen met haakjes wegwerken, tonen ze geen zogeheten 'symbol sense'.
- Gebrek aan oefening – Als er niet genoeg geoefend is, ontstaat er geen routine bij het oplossen. Maar ook geldt: aanwezig inzicht gaat verloren door het drillen met gelijksoortige sommetjes. Gewenst is gevarieerde oefening waarbij het denkvermogen aangesproken blijft.

Dezelfde bron geeft ook vele aanwijzingen voor aanpak van de genoemde problemen. Wat daarvan bruikbaar is, komt deels terug in het laatste deel van dit artikel.

In het *Handboek wiskundedidactiek* [3] vond ik de aanwijzing dat leerlingen eerst het 'waarom' moeten kunnen uitleggen (Weten waarom), voordat ze gaan oefenen om routine (Weten dat) op te doen. Dit kan bereikt worden door een goede instapoefening te bedenken.

5 m x m
12 m

figuur 1

Voorbeeld

Schrijf de formule $b = 2(a + 8)$ zonder haakjes.

×	a	+8
2	$2a$	+16

$b = 2a + 16$

figuur 2

Kern van het probleem

Bij het ontbinden gaat het vooral om de volgende problemen.

1. Gebrek aan overzicht. Leerlingen richten zich op het uitvoeren van de handelingen met formules, het 'wat' en 'hoe', met te weinig overzicht over het 'waarom'. De paragrafen 10.0 tot en met 10.4 zijn voor leerlingen losse stukjes stof met weinig samenhang. Pas in paragraaf 10.5 wordt bij het oplossen van vergelijkingen de bedoeling echt duidelijk: kwadratische vergelijkingen kunnen in diverse vormen staan. In sommige vormen zie je meteen de oplossing, in andere vormen moet je ze eerst herschrijven.
2. Leerlingen kunnen meer oefening gebruiken. Dit zit niet alleen in de hoeveelheid, maar juist in de variatie. Verder ontbreekt het aan rekenvaardigheid in werken met hele getallen.
3. Het hoofdstuk is taai en saai.

Aanvullende activiteiten en accenten

Enkele suggesties ten aanzien van probleem 1, gebrek aan overzicht, zijn:

- Een instapopdracht, waarmee leerlingen een beeld krijgen van de essentie van dit hoofdstuk (***zie figuur 6***). Bovendien wordt hiermee gestimuleerd te proberen, globaal te kijken en jezelf systematisch te controleren. Aan het eind van het hoofdstuk kan een vergelijkbare opdracht in wedstrijdvorm worden herhaald.
  In de korte nabespreking gaat het vooral om hoe ze het hebben gedaan.
  De conclusie: de probeermanier is de meest inzichtelijke manier, maar op termijn onhandig, vanwege teveel werk. We zoeken dus een hulpmiddel (ontbinden).
- Een tweede instapoefening (hier niet verder uitgewerkt):
  Gegeven een aantal kwadratische functies van diverse vorm, zoals $y = (x-5)(x+4)$, $y = x^2 + 4x$, $y = x(x-4)$, $y = x^2 + 5x - 6$, $y = 2(x-3)^2 + 17$, en een aantal grafieken. Welke grafiek hoort bij welke formule en waarom?
- Start elke les met de vraag: 'waar zijn we mee bezig?'
- Geregeld bij een opgave een grafiek tekenen.
- Wel het rechthoeksmodel van de methode gebruiken, maar dan van het begin af aan.

Suggesties ten aanzien van probleem 2, oefenen met variatie:

figuur 3

Voorbeeld 1

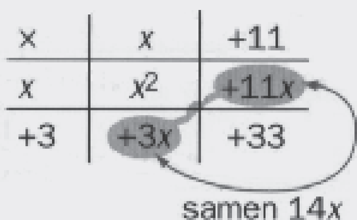
Los op: $2h(h+7)=0$
$2h=0$ of $h+7=0$
$h=0$ of $h=-7$

Voorbeeld 2

Los op: $3x(2x-4)=0$
$3x=0$ of $2x-4=0$
$x=0$ of $x=2$

Voorbeeld 3

Los op: $(2x-3)(x+7)=0$
$2x-3=0$ of $x+7=0$
$x=1\frac{1}{2}$ of $x=-7$



figuur 4



Product	Som
1 x -24	1 - 24 = -23
2 x 12	2 12 − 10
3 x -8	3 − 8 − -5
4 x -6	4 − 6 = -2
4 x 6	4 + 6 − 2

figuur 5

- Oefenen: Minirekenlesjes bij de start van de les, uit het hoofd puzzeltjes: het product van twee getallen is..., de som van die twee getallen is... Wat zijn de twee getallen?
- Oefenen met variatie door gebruik van ICT en sommen als:
  Vul in: $(x + 8)(x + \ldots) = x^2 + 19x + \ldots$
  en $(x + \ldots)(x + 5) = x^2 + \ldots x + 20$
- Controle van de oplossing van een vergelijking door systematisch de uitkomst weer invullen, en af en toe: na de ontbinding in factoren vervolgens weer de haakjes weg werken.
- Leren van fouten: toon begrip voor fouten van leerlingen, bespreek ze klassikaal en de logica ervan.

Suggesties ten aanzien van probleem 3, taai en saai:
- Waarschuw leerlingen aan het begin van het hoofdstuk (doe dat niet te vaak): dit wordt een taai en saai hoofdstuk, maar het is 'een noodzakelijk kwaad' en bevat vele handigheden waarmee de wiskunde verderop een stuk gemakkelijker wordt.
- In sommige opgaven worden contexten er met de haren bij gesleept. Echte toepassingen zijn nog te ver weg. Een presentatie met een paar mooie plaatjes, parabolen in bruggen, kogelbanen, touwen en gewelven, met enige toelichting, kunnen een les veraangenamen.

Conclusie

Dat het hoofdstuk ontbinden lastig is hoeft geen betoog. Het is vrij abstract. De oplossing lag volgens mij bij het meer oefenen met rijtjes opgaven in opklimmende moeilijkheidsgraad, zoals wij dat vroeger deden. Na grondige bestudering van het hoofdstuk in *Moderne Wiskunde* en de literatuur kom ik toch tot de conclusie dat de oplossing van het probleem moet worden gezocht in het verschaffen van inzicht. Daarvoor zijn hierboven een aantal suggesties gedaan, maar ook constateer ik dat bij nader inzien het boek veel beter in elkaar zit dan ik dacht. Een volgende keer gaat dit samen met de besproken suggesties beslist beter uit de verf komen.

figuur 6

Opdracht
Los de volgende kwadratische vergelijkingen op.
(Vind beide getallen $x = \ldots$ waarvoor de vergelijking klopt.)
Doe er zoveel mogelijk in 10 minuten. Begin met de gemakkelijkste. Probeer het handig aan te pakken.

$x^2 - 5x + 4 = 0$	$(x - 5)(x + 4) = 0$
$x(x - 4) = 0$	$(x - 4)(x + 4) = 0$
$x^2 = 25$	$(x - 8)^2 = 81$
$2(x - 3)^2 + 9 = 17$	$x^2 + 4x = 0$
$x^2 + 5x - 6 = 0$	$2x^2 = x$
$x^2 + 4x - 20 = 0$	

Noten

[1] Bij de cursus werd gebruik gemaakt van een conceptversie van:
J. Faarts, e.a. (2012): *Algebra voor leerlingen van 12-16, voor de lerarenopleiding*. Utrecht: APS.
[2] *Moderne Wiskunde* 2B havo/ vwo, editie 9. Groningen: Noordhoff, 2008.
[3] P. Drijvers, A. van Streun, B. Zwaneveld (2012):
Handboek wiskundedidactiek. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Over de auteurs

Olaf Gosselink is deeltijdstudent aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen en in de afgelopen twee schooljaren docent wiskunde aan de Nijmeegse Scholengemeenschap Groenewoud.
E-mailadres: *olaf.gosselink@gmail.com*
Ton Konings is lerarenopleider aan het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen, en medeauteur van een serie vakdidactiekboeken voor de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde.
E-mailadres: *Ton.Konings@han.nl*

Open lesmateriaal

DOOR EN VOOR DOCENTEN

[Johan Gademan]

Math4All en De Wageningse Methode hebben een samenwerking opgestart onder de naam MathUnited. Zij werken aan open digitaal wiskundelesmateriaal, wat nu al door Stichting VO-content aan de zogeheten Stercollectie is toegevoegd. Johan Gademan, voorzitter van de Stichting Math4All, beschrijft in dit artikel de uitgangspunten van het digitale materiaal en de toekomstvisie van MathUnited.

Voor de meeste wiskundesecties is het jaar begonnen als elk jaar. De (vertrouwde) wiskundeboeken zijn besteld, afgeleverd en in gebruik genomen. Maar op sommige scholen is een start gemaakt met open (digitaal) wiskundelesmateriaal. 'Open' betekent drempelloos beschikbaar lesmateriaal via internet voor docenten en leerlingen. Het lesmateriaal is vrijgegeven voor gebruik en ontwikkeld door ervaren auteurs van de Stichting Math4All en de Stichting De Wageningse Methode. Deze ontwikkelaars zijn voor het grootste deel wiskundedocenten. De stichtingen hebben hun krachten gebundeld onder de naam MathUnited en werken zonder winstoogmerk.

Stercollecties van VO-Content

De collecties voor klas 1 en 2 havo/vwo van MathUnited hebben het predikaat Stercollectie gekregen van Stichting VO-content. VO-content is ontstaan uit een krachtenbundeling van de VO-raad en meer dan 200 scholen ten behoeve van een landelijke open leermaterialenbank. De scholen betalen 7 euro per leerling per jaar voor onderhoud, actualisatie, beheer en doorontwikkeling van Stercollecties zoals die voor wiskunde havo/vwo. Dit is een spannende ontwikkeling.
Immers, het lesmateriaal is open en scholen ondersteunen vrijwillig deze open leermaterialenbank. Gelukkig groeit het aantal deelnemende scholen gestaag.
De Stercollecties van VO-content voor wiskunde op havo/vwo bieden twee complete jaarprogramma's aan die inhoudelijke en didactische samenhang hebben. Vandaar dat de eerste scholen er dit jaar direct mee aan de slag kunnen gaan.
Deze Stercollecties zijn hiermee een concurrent van de huidige methoden en hebben de intentie het monopolie van Noordhoff Uitgevers te doorbreken en docenten en leerlingen meer diversiteit te bieden dan het huidige aanbod van twee methoden *Moderne wiskunde* en *Getal & Ruimte*. (*Netwerk* wordt nog wel verkocht maar niet langer onderhouden door de uitgever.)

Achtergrond en filosofie

Docenten en leerlingen hebben bij digitaal lesmateriaal hoge verwachtingen. Iedereen heeft zijn eigen beelden en voorkeuren.
Van digitaal lesmateriaal moet meerwaarde komen om als succesvol en betekenisvol te worden ervaren. Voorafgaand aan die (inhoudelijke) meerwaarde hanteren we bij MathUnited een aantal basisregels:

1/ altijd en overal beschikbaar;
2/ snel te raadplegen, geen lange wachttijden;
3/ heldere navigatie;
4/ geen dode links of error-pagina's;
5/ geen moeilijke installaties;
6/ bij voorkeur drempelloos, dus zonder login en/of wachtwoord;
7/ en dit allemaal ook nog liefst aantrekkelijk vormgegeven.

Naast het uitdenken, structureren en ontwikkelen van ons wiskundelesmateriaal hebben we bovenstaande zo goed als mogelijk geregeld. Waarom moet dit allemaal goed geregeld zijn? Omdat je dan anders beter een boek kunt gebruiken. Een boek heeft ook nadelen, maar die hebben we allang geaccepteerd. En kijk eens naar het bovenstaande lijstje van zeven punten: ze zouden zo voor een boek kunnen gelden.

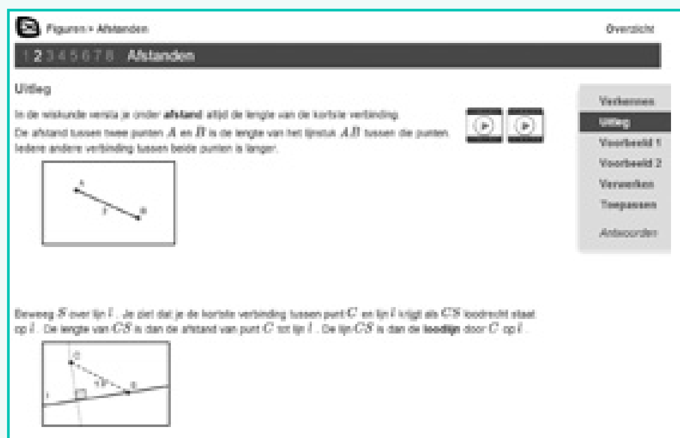
Math4All ontwikkelt lesmateriaal met de beschikbare open digitale tools en we leveren het op diverse manieren uit aan onze (potentiële) gebruikers. De digitale ontwikkelingen met en rond de bijbehorende media (o.a. digibord, pc, laptop, ipad, tablet, elo, mobiele telefoon) gaan snel.
Wij vinden het van belang ons niet aan één uitleverplatform te verbinden. Hierdoor is ons lesmateriaal flexibel. Dit heeft voor ons als ontwikkelaars voordelen, maar ook voor de gebruiker. De gebruiker kan hetzelfde lesmateriaal op diverse manieren bekijken en benaderen: zonder login, zonder wachtwoord, gewoon via alle moderne browsers op internet. En dit lesmateriaal hoeft niet op het einde van het leerjaar ingeleverd of verkocht te worden. Omdat het online werken nu nog lang niet overal goed geregeld is, kan het lesmateriaal overigens ook uitgeleverd worden op papier.

Stand van zaken

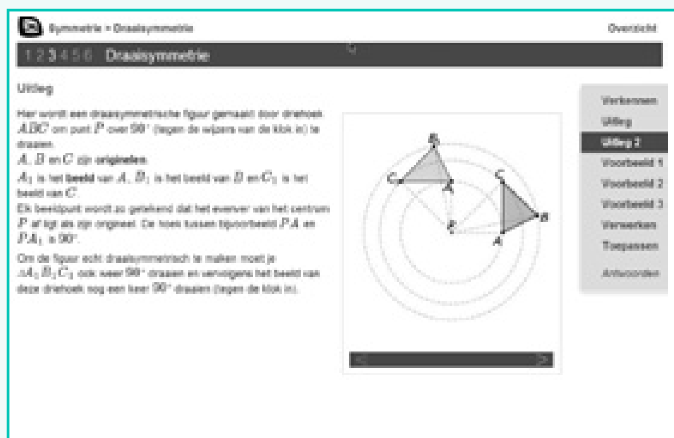
Op dit moment hebben we voor VO-Content wiskundelesmateriaal voor klas 1 en 2 havo/vwo ontwikkeld en is dat vrij beschikbaar via *www.mathunited.nl* en via *www.math4all.nl*. Het lesmateriaal van Math4All kent een vaste opbouw en is voorzien van applets, video's en AlgebraKIT. Dit zal nog verder uitgebreid gaan worden. Er ontstaat zo een doorlopende leerlijn voor alle jaren vanaf de brugklas. Realisme is belangrijk: we gaan dus niet roepen dat we beter zijn. Maar we zijn ook niet slecht; we zijn goed. We komen goed uit bij tussendoelen en eindtermen en we sluiten aan bij de referentieniveaus Rekenen. Auteurs zijn betrokken (geweest) bij cTWO en hebben

figuur 1 AlgebraKIT





figuur 2 Deel van een video-applet



figuur 3 Deel van een animatie

lesmateriaal geleverd dat straks in de nieuwe examenprogramma's in bovenbouw havo/ vwo bruikbaar is.
Inhoudelijk bieden we een stevig niveau aan wiskundeopgaven, zeer gevarieerd. Er is goede uitleg, ondersteund met applets en/of video en altijd benaderbaar.
Wat wij (nog) niet hebben is een hoog serviceniveau (antwoorden, uitwerkingen, toetsen, toetsmatrijzen et cetera). Natuurlijk bieden we antwoorden aan, ook weer open voor iedereen, maar voor complete uitwerkingen en toetsen verwijzen we graag naar bijvoorbeeld Wisbase. Wisbase kent hetzelfde uitgangspunt – voor en door docenten – en sluit daardoor qua filosofie goed aan bij MathUnited. Wisbase is afgesloten en alleen voor leden toegankelijk (zie *www.wisbase.nl*). Waar we snel op willen en kunnen reageren zijn foutjes in teksten, opgaven en/of antwoorden.
U meldt het ons en we verwerken dat zo snel mogelijk in ons aanbod.

Gebruik

De eerste scholen zijn in september gestart met ons lesmateriaal. Een paar scholen zelfs in plaats van hun eigen wiskundemethode. De huidige gebruikers werken nu vaak vanaf ipad, laptop of pc. De leerlingen verwerken alles in hun eigen schrift. We vinden: wiskunde doe je als leerling op papier, zeker zolang de eindexamens nog op papier afgenomen worden. De komende jaren moet blijken of een toenemend aantal docenten en/of leerlingen onze Stercollecties gaan gebruiken. We zouden graag een actieve club docenten aan ons willen binden en met hen verder plannen willen maken en desgewenst aanpassingen of uitbreidingen doorvoeren. We begrijpen heel goed dat docenten niet zomaar afstappen van een wiskundemethode waarmee ze jarenlang met veel plezier gewerkt hebben.
Het gebruik vraagt ook dat docenten gaan nadenken over hun aanbod aan leerlingen. Niet alleen is de inhoud en de technologie anders, maar het vraagt ook een andere didactiek. De opbouw van een wiskundeles gaat veranderen. Er zal nagedacht moeten worden over de inzet van media en het gebruik ervan. Juist op dat didactische vlak kan nog veel voortgang geboekt worden.
En er zal nagedacht moeten worden over wat werkt bij de ene groep leerlingen en wat werkt bij een andere groep. Er komt ruimte voor maatwerk. Maar hoe organiseer en interpreteer je dit in een klas met soms wel meer dan 30 leerlingen? Het lijkt me uitdagend om met een aantal actieve wiskundedocenten na te denken over (digitale) wiskundedidactiek.

Ambitie en innovatie

Het onderwijs heeft niets aan eendagsvliegen. De afgelopen jaren hebben nieuwe toetreders de wiskundemarkt geprobeerd te bedienen, maar zij zijn na een aantal jaren afgehaakt. Onderwijs is gebaat bij continuïteit en heeft niets aan opgeblazen marketingcampagnes vol halve beloften. Math4All bestaat 8 jaar en De Wageningse Methode bestaat al ruim 30 jaar. Beide zijn opgericht om onafhankelijk lesmateriaal te ontwikkelen. Idealisme ligt aan de basis van deze keuze.
Langzaam maar zeker komen we, idealistisch als we zijn, in de fase dat we aan (inhoudelijke) meerwaarde kunnen werken.
Ik noem vier grote thema's:
1/ bevordering inzicht en vaardigheden;
2/ maatwerk;
3/ inzicht en advies;
4/ inhoudelijke feedback.
De komende jaren zullen we, eventueel met partners, deze thema's gaan invullen.
We denken dat we door de toevoeging van video's, applets en AlgebraKIT-pagina's al aan thema 1 begonnen zijn.
En ook dit zal nog verder uitgebreid worden. Leerlingen verschillen; hun leerstijl verschilt; hun voorkennisniveau verschilt. Het zou mooi zijn als we maatwerktrajecten kunnen samenstellen voor groepen leerlingen. Voor een docent is maatwerk vaak pas uitvoerbaar als hij inzicht krijgt over de vorderingen en prestaties. Het zou geweldig zijn als leerlingen bij het leveren van prestaties inhoudelijke feedback gaan krijgen, niet alleen van de docent maar ook van het lesmateriaal zelf.
We willen het niet bij het aanbieden van open lesmateriaal laten, we willen meer. Op dit moment staat bij de meeste scholen het boek centraal. Dat zal niet op korte termijn veranderen. Toch zou het wiskundeonderwijs wel wat meer variatie mogen bevatten. Bij geen ander vak is de keuze in lesmateriaal zo beperkt als bij het vak wiskunde. VO-Content, Math4All en De Wageningse Methode zorgen voor de broodnodige concurrentie en diversiteit. Er ontstaat nu kwalitatief goed digitaal lesmateriaal dat voor iedere docent van meerwaarde kan zijn, of je nu vanuit het boek werkt of volledig digitaal. Doe er uw voordeel mee. Succes!

Links en informatie

MathUnited: *www.mathunited.nl*
VO-content: *www.vo-content.nl*
Math4All: *www.math4all.nl*
Reacties en vragen naar: *info@mathunited.nl*

Over de auteur

Johan Gademan is voorzitter van de Stichting Math4All. Hij is docent wiskunde op het Strabrecht College in Geldrop en was 13 jaar werkzaam als uitgever bij Wolters-Noordhoff, uitgeefmanager bij ThiemeMeulenhoff en onderwijskundig adviseur bij Codename Future. Sinds 2006 is hij zelfstandig ondernemer en profileert hij zichzelf als onafhankelijk educatief specialist.
E-mailadres: *j.gademan@math4all.nl*

Getuigen



[Danny Beckers]

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs.
In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

Neem een vel ruitjespapier. Teken evenwijdig, op steeds 2 centimeter van elkaar, drie even lange verticale lijnstukken van 10 centimeter lengte. Zet bij de twee buitenste lijnstukken de getallen 0 tot en met 10 bij de roosterpunten. Bij het middelste lijnstuk komen de getallen 0, 2, 4, tot en met 20. Wat we nu hebben is een zogeheten *optel-nomogram*.
Het werkt als volgt. Kies twee punten op de linker en de rechter lijn, verbind de beide punten en op de schaal van de middelste lijn valt nu bij het snijpunt de som van de beide gekozen punten af te lezen. Dit verbluffend eenvoudige idee, direct gevolgd door een logaritmische variant waarmee het product valt af te lezen, is één van de vele voorbeelden uit het lesboek *Nomografie* (1949) van de Delftse lector N.D. Haasbroek; ***zie figuur 1***. Een stukje verderop in het boek staan nog twee andere mogelijkheden om het diagram vorm te geven. Dit boek was in Nederland een van de laatste grote publicaties op het gebied van de nomografie, eens een bloeiend vakgebied.

Nomografie was een verzameling van handige projectietechnieken die de ingenieur in staat stelde om snel inzicht te krijgen in het gedrag van variabelen die onderling verband hielden. In 1891 publiceerde de Franse ingenieur/wiskundige Maurice d'Ocagne (1862-1938), hoogleraar aan de prestigieuze École Polytechnique, de eerste volledige verhandeling over de nomografie. Sindsdien was het een snel groeiend vakgebied waar met name onder ingenieurs veel belangstelling voor bestond. Ook onder fysici was het gebruik van nomogrammen al snel goed gebruik.

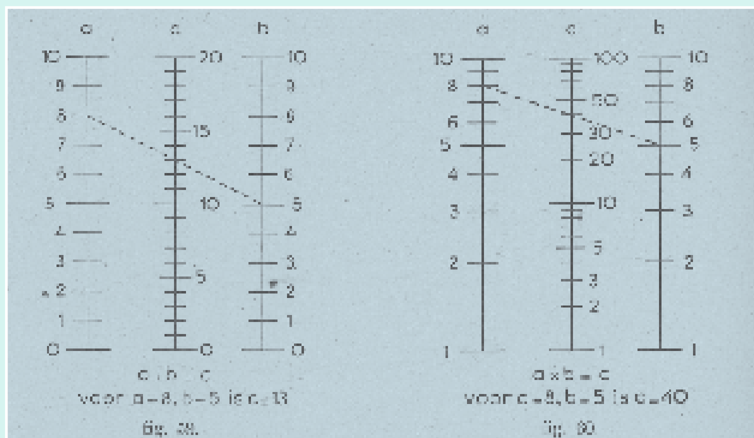
In het Nederlandse wiskundeonderwijs was de rekenliniaal niet gewenst; men gebruikte liever de logaritmetabellen, omdat men veronderstelde dat het gebruik daarvan meer inzicht vergde. Het is dan ook verrassend dat uitgerekend onder Nederlandse wiskunde-onderwijzers het gebruik van nomogrammen werd besproken. Het was P.G. Tiddens (1873-1955; ***zie foto 1***), die in 1931 een artikel in *Euclides* publiceerde over de nomografie. Tiddens had in Groningen wis- en natuurkunde gestudeerd en was sinds 1897 als jonge doctorandus tot wiskundedocent te Leeuwarden benoemd. In 1904 promoveerde hij in Leiden bij de beroemde Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), op een proefschrift op het gebied van de optica. Na op diverse plaatsen als docent wiskunde te hebben gediend werd hij in 1912 te Amersfoort als directeur van de HBS benoemd, waarna hij zich in de loop van een aantal jaren opwerkte tot directeur van de Rijks-HBS met vijfjarige cursus te Utrecht. Hij was actief lid van de Vereniging van Leraren in het Middelbaar Onderwijs, en de eerste voorzitter van de vereniging voor leraren in de WIskunde, MEchanica en COSmografie (WiMeCos) die in 1924 werd opgericht: een van de voorlopers van de huidige NVvW. Hij bleef voorzitter tot 1936, vlak voor zijn pensionering. In 1937 werd hij benoemd tot erelid van WiMeCos. Tiddens bleef tot zijn eervol ontslag in 1937 als directeur (en docent wiskunde) aan de Utrechtse HBS verbonden. Ook na zijn pensionering bleef hij actief in het Utrechtse verenigingsleven. Bij het tachtigste jubileum van de Utrechtse HBS in 1947 was Tiddens nog actief betrokken. In 1955 overleed hij en werd hij in kleine kring gecremeerd; veel van zijn collegae had hij overleefd.



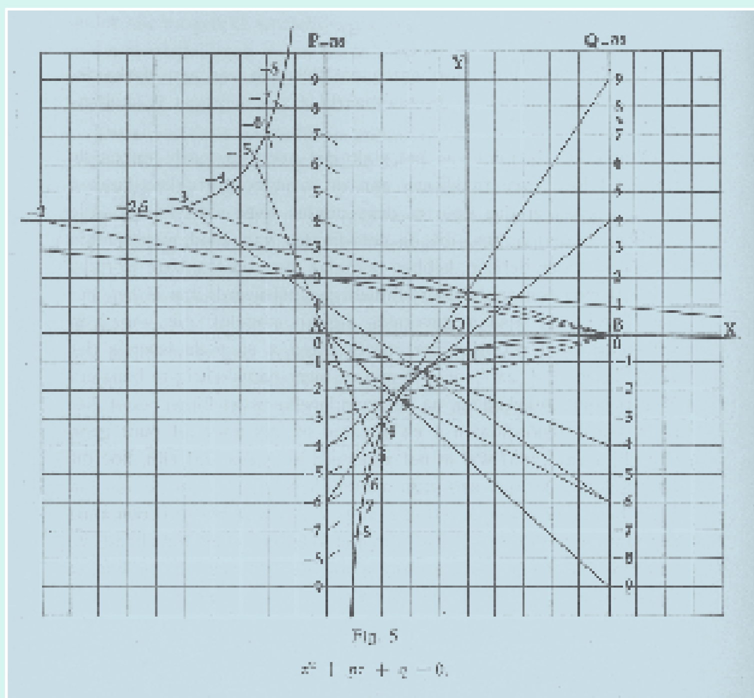
foto 1 P.G. Tiddens

Tiddens mocht dan een achtergrond hebben in de natuurkunde, hetgeen zijn affiniteit met de nomografie verklaart, hij was ook goed op de hoogte van het reilen en zeilen binnen het Nederlandse wiskundeonderwijs. Hij publiceerde over de nomografie dan ook met enige schroom. Hij argumenteerde dat aandacht voor de nomografie in *Euclides* gerechtvaardigd was omdat de wiskundedocent anno 1931 toch op de hoogte moest zijn van de mogelijkheden die het vakgebied bood. De nomografie had een gedegen wiskundige achtergrond en leerlingen gingen natuurlijk niet allemaal wiskunde studeren – ze konden ook in de natuurkunde terecht komen. Maar bovendien zag hij ook een paar aardige toepassingen die in de klas konden worden geïntroduceerd: als directeur gaf hij indertijd ook les. De toepassingen die hij op het oog had, hadden overwegend betrekking op natuurkundige wetten. Bovendien had hij voorbeelden van nomogram-constructies met betrekking tot het oplossen van vergelijkingen die hem erg aanspraken.

Het nomogram voor de oplossing van vierkantsvergelijkingen sprak bij Tiddens het meest tot de verbeelding. Uitvoerig geeft



figuur 1



figuur 2

hij aandacht aan de eigenschappen van het nomogram. Zo bewijst hij dat voor een lijnnomogram dat oplossingen doet vinden voor de vergelijking $z^2 + pz + q = 0$ een p- en q-as met lineaire schaalverdeling kunnen worden gekozen. Ook laat hij zien dat de resulterende kromme dan een hyperbool wordt, daarbij gebruik makend van d'Ocange-coördinaten; ***zie figuur 2***. Vervolgens beschrijft hij hoe het nomogram met leerlingen uit de hoogste klassen puntsgewijs kan worden geconstrueerd. Hij begint met op te merken dat één van de hyperbooltakken door het nulpunt van de q-as (B) gaat, omdat alle vergelijkingen $z^2 + pz = 0$ een oplossing $z = 0$ hebben en alle lijnen die vanuit B naar de p-as lopen, elkaar in B snijden. Vervolgens trekt hij als hulplijnen vanuit B de lijnen door de punten $p = -7$, $p = -6$, …, $p = 7$. Ergens op die lijnen liggen de schaalpunten op de hyperbool die horen bij de oplossingen $z = 7$, $z = 6$, …, $z = -7$. Om de exacte locatie te vinden snijdt Tiddens deze lijnen met de lijnen die vanuit het nulpunt op de p-as gaan door de (deels buiten de figuur gelegen) punten $q = -49$, $q = -36$, $q = -25$, $q = -16$, $q = -4$, $q = -1$ en $q = 0$.
De bijbehorende vergelijkingen hebben immers dezelfde oplossingen, en dus vindt Tiddens bijvoorbeeld het punt behorende bij $z = 3$ op de hyperbool door middel van het snijpunt van de lijn van B naar $p = -3$ en de lijn van A naar $q = -9$. Is zo een behoorlijk aantal punten geconstrueerd, dan kan er een vloeiende lijn doorheen worden getrokken en is het nomogram klaar voor gebruik. In de figuur heeft Tiddens ter illustratie de lijn van $q = -6$ naar $p = 1$ getrokken, waarmee hij de werking van het nomogram illustreert: de lijn snijdt de beide hyperbooltakken inderdaad bij $z = 2$ en $z = -3$.
De meer ingewikkelde nomogrammen, waarbij tot zes parameters werden verwerkt, liet Tiddens in zijn bijdrage achterwege. Het levert wel spectaculaire plaatjes op! Het is bijna jammer dat de computer deze afbeeldingen volkomen overbodig heeft gemaakt. Eens een jong en veelbelovend vakgebied, warm aanbevolen door de voorzitter van uw vereniging, nog geen eeuw later alweer afgeserveerd door een rekenmachine.

Over de auteur
Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

Uitdagende problemen

OPA IS DE SLIMSTE!

[Jacques Jansen]

In verschillende leerjaren kunnen onderstaande opgaven ingezet worden. Diverse opgaven uit het boekje 'Opa is de slimste!' worden onderzocht en daarnaast ook nog een opgave uit het blad Pythagoras en één uit de vakantiecursus. En niet alleen de leerlingen worden uitgedaagd door deze problemen.



foto 1

Het boekje *Opa is de slimste!* van Jack Botermans is een boek met meer dan 100 puzzels om slimmer te blijven dan je kleinkinderen [1]. Straks daar meer over. Nadat ik net opa was geworden, kreeg ik dit boek cadeau van een bevriende collega. Zoals aangekondigd in het vorige artikel [2] zou ik terug komen op de studiedag van de sectie wiskunde van mijn school. Ik was door mijn sectiehoofd uitgenodigd om op 8 mei een presentatie te doen over uitdagende problemen. Ik voelde me uitgedaagd, maar ik hield het wel in de opa-sfeer. Ik begon mijn presentatie met het geboortegewicht van mijn kleindochter.

Geboortegewicht kleindochter

Mijn kleindochter heeft een geboortegewicht van 3760 gram; ***zie foto 1***.

» Schat hoe groot de kans is voor een meisje op een dergelijk geboortegewicht of een nog groter gewicht.

Dit kan een kenmerk van een uitdagend probleem zijn. Eerst schatten en inventariseren. Het is leuk als de schattingen uiteenlopen. Een reden toch om eraan te gaan rekenen? Hoewel, dat moet gezegd worden, mijn collega's zaten met hun schattingen allemaal boven de 50%.
Om echt te kunnen gaan rekenen hebben we het gemiddeld geboortegewicht (laatste jaren ongeveer 3372 gram) en de standaardafwijking nodig. Met die gegevens en met gebruik van de GR is het probleem dan verder een eitje.
's Morgens vóór de presentatie heb ik het met mijn twaalf leerlingen wiskunde-D uit 5-vwo ook over uitdagende problemen. Ik vertel de leerlingen dat ik net in de pauze *Opa is de slimste* heb gekregen en vraag hun om uit het boekje een uitdagend probleem te halen. De leerlingen zijn het snel met elkaar eens en het wordt een fietsprobleem.

Uit: *Opa is de slimste!* – Je kleinkind Daan fietst elke week naar zijn neef verderop. Vandaag begint hij met een gangetje van 12 km/u, totdat hij halverwege een klapband krijgt. Twee km heeft Daan gelopen, precies een half uur. Dan krijgt hij een lift, die hem met een snelheid van 8 km/u naar zijn neef brengt. Hij heeft 1,5 uur nodig om zijn neef te bereiken.
Hoe ver woont hij van zijn neef?

De vraag is: hoe begin je en welke strategie volg je dan verder? Zowel onder mijn collega's als van mijn leerlingen zijn er maar weinig die een lijnstuk tekenen voorzien van relevante gegevens.
Kijk ik naar de oplossingen in het boek van Jack Botermans, achterin op bladzijde 48, dan staat er het volgende.

De afstand is 12 kilometer. Te voet legt Daan in een half uur twee kilometer af. Dan blijft er een uur over. Daarvan legt hij de helft af met een snelheid van 12 kilometer per uur – dus zes kilometer. De tweede helft en het laatste half uur rijdt hij acht kilometer per uur, dus vier kilometer. 2 + 6 + 4 = 12

Inderdaad, 12 km is het juiste antwoord, maar bent u ook niet verbaasd over deze uitwerking? Toegegeven: het is niet een *echt* wiskundeboek.
Was de vraag wel goed geformuleerd? In ieder geval is het raadzaam om in de laatste zin van de gegevens de woorden 'in totaal' toe te voegen.
Hoe zou u de vraag van Jack Botermans formuleren zodat zijn uitwerking bij zijn vraag past?
Een gevaar bij deze opgave is dat je met een verkeerde strategie het goede antwoord van 12 km kunt krijgen. Je mag natuurlijk snelheden niet zomaar middelen zoals bij twee toetscijfers met hetzelfde gewicht. Meen je dat de gemiddelde snelheid wel (12 + 8)/2 is, dan krijg je echter toch 12 km (2 km plus 10 km) als goed antwoord.

Invoeren van variabelen

Wij docenten hebben meestal de neiging variabelen in te voeren. Hieronder volgen de uitwerkingen met invoeren van variabelen van twee docenten.

Hij woont 12 km van zijn neef! Immers, x uur over de eerste kilometers; y uur over de laatste kilometers en nog een ½ uur over 2 km. Geeft, als a de gevraagde afstand is:
$x + y + ½ = 1½$
$½a = 12x$ en $½a = 2 + 8y$

Rest is een fluitje van een cent.
Of, bijvoorbeeld, de uitwerking van een andere collega:

De afgelegde afstand bestaat uit drie stukken: x, 2 en $(x-2)$ km tegen 12, 2 en 8 km/u. Het tweede stuk in ½ uur, dus de rest in 1 uur. Gevraagd de afstand afgelegd in 1 uur voor het eerste en derde stuk.
Ik ben wel geneigd een lijntje te trekken om daarop de drie stukken aan te geven en er de afstand en snelheid bij te zetten.
Vervolgens haal ik er een vergelijking uit voor de halve afstand x:
$x/12 + (x-2)/8 = 1$
Wat dan $x = 6$ oplevert.
Ik hoor graag of het antwoord 12 km juist is… (collega vraagt om bevestiging.)

Oplossen zonder technieken

Over het invoeren van variabelen gesproken. Hoe lost u het volgende probleem [3] op of hoe doen uw leerlingen dat?

Loes, Karel en Merel fietsten tijdens hun vakantie 100 km in vijf dagen. Elke dag reden ze zes kilometer meer dan de vorige dag. Hoeveel kilometer fietsten ze op de eerste dag?

Veel leerlingen lossen dit probleem op via *trial and error*, en met een beetje intuïtie of mazzel gaat dat lukken.
In elke klas waar ik de opdracht gaf, was er wel iemand met de volgende oplossingsmethode:

- gemiddeld fietsen ze 20 km per dag;
- op de derde dag wordt die 20 km afgelegd;
- op de eerste dag fietsen ze 20 – 6 – 6 km, en dat geeft 8 km.

Met kennis over rijen zie je de eerste vijf termen van een rekenkundige rij, of liever: rij met lineair verband. Via de somformule $S_n = \frac{1}{2}n\cdot(u_1 + u_n)$, of een variant daarvan, krijg je de volgende uitwerking:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot(a+a+24) &= 100\\ 2a+24 &= 40\\ 2a &= 16\\ a &= 8\end{aligned}$$

waarbij a (= u_1) de variabele is die het aantal afgelegde kilometers geeft van de eerste fietsdag.

Blikwisseling

Blikwisseling, zo noemt Michiel Doorman dat in een college van de Vakantiecursus 2012 op de TU/e wanneer hij de tweede uitwerking van het volgende probleem behandelt voor bijvoorbeeld leerlingen met wiskunde-C.

Hoeveel 7's komen voor in de (gehele) getallen van 0 tot 1000?

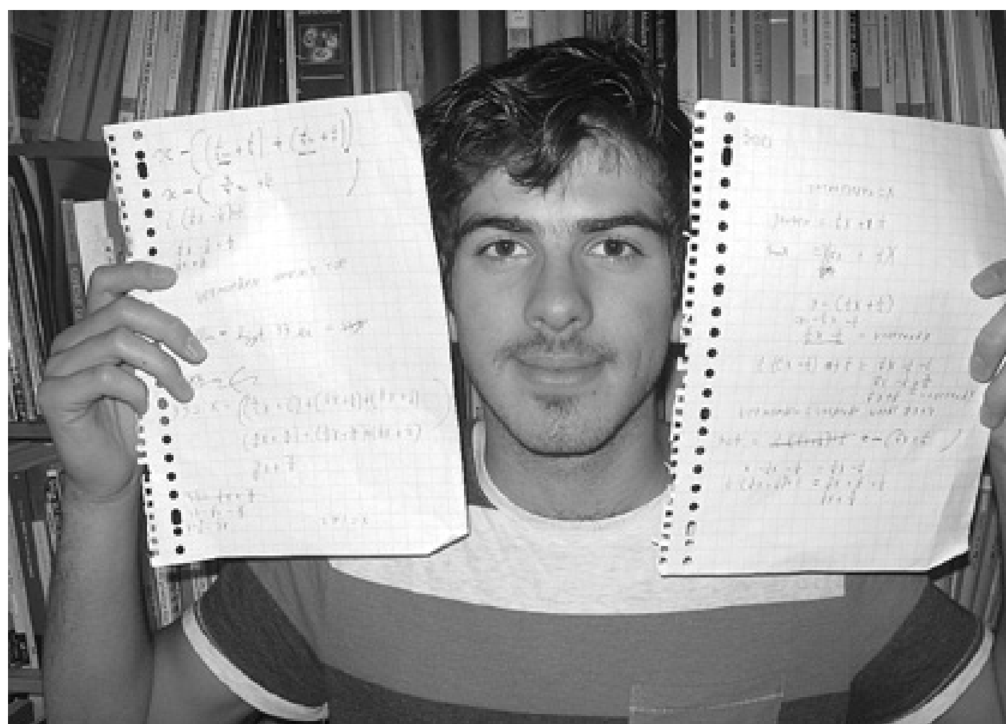
In figuur 1 is de uitwerking van Viktor Winkeler uit 6-vwo met wiskunde-A afgebeeld. Viktor is een leerling die van mij bijles heeft. De uitwerking van Viktor is gebaseerd op systematisch tellen.
Tweede uitwerking – We gaan er heel anders naar kijken, met een andere blik dus. Elk getal vanaf 0 tot 1000 kun je representeren met drie cijfers. Bijvoorbeeld getal 8 stellen we voor door 008. In totaal heb je dan 3000 cijfers. Als we uitgaan van een eerlijke verdeling van de cijfers van 0 tot en met 9 dan is het totaal aantal cijfers $(3 \times 1000)/10 = 300$.
Je kunt je natuurlijk afvragen hoeveel 7's er voorkomen in de getallen van 0 tot 10, van 0 tot 100, van 0 tot 1000, enz. Het vermoeden is al gauw dat er een rij ontstaat met een mooi patroon:
1, 20, 300, 4000, 50000, 600000, …
Beide uitwerkingen zijn geschikt voor het opstellen van een directe formule en een recursieformule. Letten we op een mogelijk patroon en schrijven we daarna de rij met behulp van machten van tien:
$1\cdot 10^0,\ 2\cdot 10^1,\ 3\cdot 10^2,\ 4\cdot 10^3,\ 5\cdot 10^4,\ 6\cdot 10^5, \ldots$
en duiden we een willekeurige term aan met t_n, dan vinden we al gauw:
$t_n = n\cdot 10^{n-1}$ en $t_n = 10\cdot t_{n-1} + 10^{n-1}$
Een aardig voorbeeld van een rij die niet lineair (rekenkundig) of exponentieel (meetkundig) is.

Eieren verkopen

Is het volgende probleem uit *Opa is de slimste!* wel een eitje?

Een marktvrouw verkoopt aan mijnheer Jansen haar halve voorraad eieren en een half ei. Dan verkoopt ze aan mijnheer Smit de helft van de overgebleven voorraad en een half ei. Vervolgens koopt mijnheer Kok de helft van de tot nu toe overgebleven eieren plus een half ei. Uiteindelijk koopt mijnheer Muller de overige eieren, namelijk 33 stuks.
Hoeveel eieren had de marktvrouw om te beginnen? Let op : de marktvrouw verkocht geen gebroken eieren!

foto 2 Voor het eierprobleem heeft Viktor Winkeler twee A4'tjes nodig met uitwerkingen



figuur 1

figuur 2

Ik leg dit probleem weer voor aan Viktor die de (saaie?) vaardigheden uit 4- en 5-vwo aan het repeteren is. Zijn eerste reactie: 'Een half ei is toch een gebroken ei en dat mag juist niet!' De vraag van mij is: 'Welke informatie geeft de eerste zin?'
Los je dit probleem op met algebra, dan komen de volgende deelvaardigheden aan de orde: goed lezen – expressies opstellen – bewerkingen met breuken – haakjes verdrijven – korter schrijven, maar ook goed kijken en vermoedens krijgen.
Het valt Viktor tegen om de opgave goed te lezen en te doorgronden. Ik help hem om een begin (model) te maken: de voorraad eieren noemen we *x*. Een terugkerend probleem is het steeds goed opstellen van een expressie. Wat koopt een mijnheer en wat blijft er nog over?

Meneer	koopt	Blijft over
Jansen	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
Smit	$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$
Kok	$\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}x-\frac{7}{8}$
Muller	33	

Misschien is het raadzaam om de voorraad 8*x* te noemen. Deze ingreep doen we om het werken met breuken wat te verminderen. Er wordt dan achtereenvolgens verkocht (deel van exponentiele rij):
$4x+\frac{1}{2}, 2x+\frac{1}{4}, 1x+\frac{1}{8}$
En tot slot blijft over $x-\frac{7}{8}$ en dat is gelijk aan 33.

Voorraad is 8 × 33 + 7.
In figuur 2 is een stuk berekening afgebeeld van Viktor met het goede eindantwoord van 271 eieren.

Tot slot

Hoewel, zoals gezegd, *Opa is de slimste!* geen wiskundeboekje is, is het wel een aardige bron om uit te putten en je les te verrijken. Er is veel variatie: cijferpuzzels, woordraadsels, luciferpuzzels en beeldraadsels. Opa's zijn voor de kleinkinderen – schrijft Botermans – bijzondere mensen. Dat geldt evenzo voor oma's. Het equivalent van het boekje heet dan ook *Oma is de slimste!*.
De boekjes kosten nog geen 10 euro per stuk en het kan zijn dat u bij De Slegte zo'n boekje wel voor een heel zacht prijsje ziet liggen.

Noten

[1] Jack Botermans schreef *Opa is de slimste* samen met Pieter van Delft. Het verscheen in 1978 als het boek van de maand 'Spelen met puzzels'. Een bronnenboek voor wiskundedocenten. Uitgever: Terra-Lannoo; ISBN: 9789089891570
[2] Zie het artikel in *Euclides*, jaargang 88, nr. 2; pp. 85-86.
[3] Bron: Tijdschrift *Pythagoras*

Over de auteur

Jacques Jansen is docent wiskunde aan het Strabrecht College te Geldrop.
E-mailadres: *j.jansen@strabrecht.nl*

Wiskunde en autisme

DEEL 2, HOOFD- EN BIJZAKEN

[Bram Arens en Danny Beckers]

Leerlingen met autismespectrumstoornis (ASS)[1] vinden steeds vaker hun weg naar het reguliere onderwijs. Aan veel van deze leerlingen merk je op het eerste gezicht weinig. Dat neemt niet weg dat ze tegen problemen aanlopen, zowel thuis als op school.Als docent wiskunde ziet u de leerling vaker, kunt u beter beoordelen wat zijn of haar prestaties waard zijn en heeft u meer mogelijkheden om de leerling te sturen dan een begeleider op afstand. Het vak wiskunde is vanwege de ondubbelzinnige vragen en antwoorden bij uitstek geschikt om het leerproces van een ASS-leerling te beïnvloeden. In deze serie geven Bram Arens en Danny Beckers een aantal handvatten om effectief vorm te geven aan passend onderwijs voor deze doelgroep.

Scheiden hoofd- en bijzaken

Een probleem dat in de context van een wiskundeles aardig is om mee te nemen, is een probleem dat alle leerlingen in meerdere of mindere mate ervaren, maar waar veel ASS-leerlingen extra moeite mee hebben, namelijk: het scheiden van hoofd- en bijzaken.

Omdat binnen de context van wiskunde-opgaven het over het algemeen relatief eenvoudig is om relevante en niet-relevante informatie te scheiden, is de wiskundeles een voor de hand liggend startpunt om het over hoofd- en bijzaken te hebben.
U herkent de leerling die moeite heeft met het scheiden van hoofd- en bijzaken aan zijn

Kadertekst 1
Zeehonden zijn schrandere dieren, die met hun speelse gedrag veel mensen voor zich weten te winnen. In de poolgebieden waar deze dieren wonen, worden ze bovendien gewaardeerd voor hun pelzen en hun vlees. Daarnaast zijn het verbluffend snelle zwemmers. Een zeehond zwemt gedurende 20 seconden met een snelheid van 5 m/s. Vervolgens zwemt hij op z'n gemak een volle minuut met een snelheid van 2 m/s. Bereken zijn gemiddelde snelheid.

Kadertekst 2
Een kudde olifanten trekt over de steppen van Afrika. Gedurende de eerste dag (een dag telt 24 uur) trekken ze met de hele troep over een afstand van 18 km naar een waterplaats. Na zich aldaar verfrist te hebben en het een en ander te hebben gegeten, trekt de kudde verder. Die dag komen ze maar 8 km verder, omdat er onderweg een paar olifantenkalfjes worden geboren. Na een overnachting op de steppen trekken ze verder.
Opgehouden door de kalfjes, die minder snel kunnen lopen, trekken ze die dag slechts 5 km naar een waterplaats. Wat is de gemiddelde snelheid (in kilometers per uur) van de kudde gedurende

Kadertekst 3
Bron: *Moderne Wiskunde* havo/vwo 1A leerboek; opdracht V-7 op pagina 65 (hoofdstuk 2 verhoudingen)
De tekst van de oorspronkelijke opgave (versie 1) luidt:
Willem brengt folders rond en krijgt daar 12 euro voor. Harco helpt hem een handje. Ze spreken af dat ze de 12 euro verdelen in de verhouding van het aantal bezorgde folders. In totaal moeten er 240 folders bezorgd worden.
a. Neem aan dat Willem 160 folders bezorgt. Geef de verhouding tussen het aantal bezorgde folders door Willem en het aantal bezorgde folders van Harco. Schrijf de verhouding met zo klein mogelijke gehele getallen.
b. Reken voor beiden uit hoeveel euro ze krijgen.
c. Neem nu aan dat de verhouding tussen het aantal bezorgde folders door Willem en het aantal bezorgde folders door Harco 3 : 5 is. Hoe moeten ze dan 12 euro onderling verdelen?

Versie 2, gegevens alleen aan het einde toegevoegd.
Willem brengt folders rond en krijgt daar 12 euro voor. Harco helpt hem een handje. Ze spreken af dat ze de 12 euro verdelen in de verhouding van het aantal bezorgde folders. In totaal moeten er 240 folders bezorgd worden. *Willem doet er normaal gesproken 3 uur over om alle folders te bezorgen. Samen met Harco doet hij er 1 uur minder over.*
Vragen a, b, c zie versie 1.

Versie 3, met gegevens binnen de tekst verwerkt.
Willem brengt folders rond en krijgt daar 12 euro voor. *Dat kost hem meestal zo'n 3 uur werk.* Harco helpt hem een handje. *Daardoor boekt Willem maar liefst 1 uur tijdswinst.* Ze spreken af dat ze de 12 euro verdelen in de verhouding van het aantal bezorgde folders. In totaal moeten er 240 folders bezorgd worden.
Vragen a en b zie versie 1.
c. Neem nu aan dat de verhouding tussen het aantal bezorgde folders door Willem en het aantal bezorgde folders door Harco 3 : 5 is – *dit komt doordat Harco een half uur tijdswinst weet te boeken door op de scooter te gaan.* Hoe moeten ze dan 12 euro onderling verdelen?

of haar proefwerkblaadje. Alle standaard opdrachten zijn netjes uitgewerkt, maar de opdracht waarbij de leerling informatie uit een figuur moest halen, of waar een verhaaltje moest worden geïnterpreteerd zijn niet uitgewerkt. Het kan ook zijn dat de leerling juist veel uitwerkingen heeft gemaakt die nergens toe leiden. We willen wel even opmerken dat het ook mogelijk is dat er andere problemen aan ten grondslag liggen, zoals dyslexie, moeite hebben met het leggen van verbanden of gebrek aan inzicht. Dit hoeft het werken aan een beter inzicht in het scheiden van hoofd- en bijzaken echter niet in de weg te staan.
We zullen aan de hand van een stappenplan drie niveaus belichten waarop een leerling problemen kan hebben met het scheiden van hoofd- en bijzaken. De onderstaande stappen stellen enerzijds de docent in staat om in kaart te brengen op welk niveau de problemen spelen. Anderzijds is het meteen een mooie oefening voor de leerling.

Overbodige tekst / stap 1

We beginnen met technieken om opgaven uit te breiden. Een voor de hand liggende manier om opgaven uit te breiden is door er overbodige tekst aan toe te voegen. U kunt de leerling erop attenderen dat er in veel opgaven tekst is opgenomen die voor de opdracht zelf niet terzake doet.
Leerlingen die echt veel moeite hebben met het scheiden van hoofd- en bijzaken moet u hier een beetje bij de hand nemen. U geeft hun bijvoorbeeld een reeks opdrachten die beginnen met het meest eenvoudige geval: een inleidende tekst, met op het eind de benodigde gegevens, gevolgd door de vraag, zoals ***in kadertekst 1***. Het kan verhelderend werken om de opdracht op het bord stap voor stap te ontleden, en de delen waarin geen nuttige informatie staat domweg uit te vegen.
Vervolgens voert u de moeilijkheidsgraad op door de benodigde gegevens door de tekst heen te verspreiden. Attendeer de leerling erop dat hij eigenlijk de tekst alleen maar hoeft te scannen op de benodigde gegevens. Laat hem die eventueel met een markeerstift aangeven. Zie het voorbeeld ***in kadertekst 2***.
In veel gevallen hoeft de leerling alleen naar de getallen te zoeken, maar u kunt natuurlijk ook de getallen in woorden uitschrijven. Gebruik bijvoorbeeld verschillende tijdsaanduidingen in de inleiding en de vraag. Dit soort opgaven zijn beduidend eenvoudiger dan een opdracht begrijpend lezen, maar zijn een mooi startpunt.

Onnodige gegevens / stap 2

Opgaven uitbreiden door er onnodige gegevens aan toe te voegen gaat een stapje verder, en maakt het voor leerlingen een stuk moeilijker. Er zijn veel leerlingen die houvast missen wanneer er getallen in een opgave voorkomen die ze niet hoeven te gebruiken.
U kunt hierbij in de les ook de volgende werkvorm gebruiken. U neemt een aantal opgaven uit het boek en legt die aan de leerlingen voor met de opdracht om er tekst én gegevens aan toe te voegen, om hun medeleerlingen in verwarring te brengen. Leerlingen wisselen opdrachten uit en kijken die vervolgens van elkaar na. U kunt hun maakwerk en nakijkwerk vervolgens beoordelen alsof het een overhoring betreft. Een mooie oefening hoofd- en bijzaken scheiden, maar daarnaast maakt u leerlingen ook bewust van het feit dat niet alle gegevens in een opgave gebruikt moeten worden. We geven een voorbeeld ***in kadertekst 3***.
Opnieuw kan de markeerstift voor de leerling die hier moeite mee heeft, uitkomst bieden. Hij markeert wederom alle relevant ogende passages, alleen weet hij nu, in tegenstelling tot het vorige geval, niet meteen of de passages ook daadwerkelijk relevant zijn. Daarvoor zal hij de relevantie van zijn gemarkeerde delen opnieuw moeten evalueren. Let er hierbij op dat de leerling niet teveel markeert: een leerling die nu de hele tekst markeert, hangt duidelijk nog bij stap 1 en moet een tussenvorm aan opdrachten worden aangeboden.

Verschillende gegevens / stap 3

Een vervolgstap die u vervolgens met uw leerlingen kunt maken, is de volgende. Neem een aantal krantenartikelen zoals het volgende: *www.volkskrant.nl/vk/nl/2686/Binnenland/article/detail/3015043/2011/11/04/185-ton-vuilnis-800-000-bezoekers-287-aanhoudingen-Koninginnedag-in-cijfers.dhtml*
Andere artikelen met cijfers zijn te vinden in [3]. Als alternatief zou u artikelen van een tijdschrift als *Science* kunnen gebruiken of een boek zoals [4].

→

VERSCHENEN / ZEKERHEDEN IN WAARNEMINGEN



Ondertitel: Natuurwetenschappelijke ontwikkelingen in Nederland rond 1900
Tekst: onder redactie van Jan Guichelaar, George B. Huitema en Hylke de Jong
Uitgever: Verloren, Hilversum (2012)
ISBN: 978 90 8704 194 6
Prijs: €29,00 (237 pagina's; gebonden)

Van de achterflap

Rond 1900 waren de natuurwetenschappers volop in beweging. Als gepromoveerd leraar aan de Rijks-hbs te Groningen leverde Obe Postma (1868-1963, fysicus, dichter in de Friese taal en onderzoeker van het Friese land en leven) een bijdrage aan de discussie over de statistische mechanica, en de kansrekening en statistiek. Met zijn werk als uitgangspunt bevat deze bundel artikelen over de ontwikkeling in de natuur- en geesteswetenschappen, de psychologie, de jonge hbs en het Natuurkundig Genootschap in Groningen.

Verdeel de leerlingen in een aantal groepen en geef iedere groep een artikel. Gun de groepen tijd om er opgaven bij te bedenken; tevens produceren ze bij hun opgave een beredeneerde uitwerking op een afzonderlijk vel papier. Door er op deze manier mee bezig te zijn worden leerlingen zich opnieuw bewust van het feit dat gegevens op zichzelf niet relevant zijn, maar dat het van de opdracht afhangt of een gegeven belangrijk is of niet. Laat de leerlingen dan de opdrachten aan elkaar geven; elke leerling maakt vervolgens een opgave bij een artikel dat hij *niet* heeft gelezen. De tijd die het kost om een goed antwoord te formuleren kunt u gebruiken als maatstaf voor de snelheid waarmee leerlingen de benodigde informatie weten op te snorren.
Het is goed om bij een leerling te weten in welk gedeelte van het denkproces de meeste tijd gaat zitten. Voor de ASS-leerling kan de bovenstaande oefening een heel lastige opdracht zijn: het probleem kan zitten in het snel vinden van een oplossing of in het doorgronden en overdenken van de geboden informatie. Ook het zelf bedenken van een opgave kan veel vergen van hem of haar. Als u weet op welk gedeelte de leerling vastloopt, kunt u daar ook verder op inzoomen.

Bij gebrek aan vooruitgang

Niet voor alle leerlingen met ASS is bovenstaande introductie succesvol. Wanneer uw ASS-leerling moeite heeft met het scheiden van hoofd- en bijzaken, dan is het zaak dat hij eraan gaan wennen. Als de leerling inziet dat er een probleem speelt, al is het alleen maar dat hij het vervelend vindt dat hij uw opgaven niet kan oplossen, dan zijn er mogelijkheden om verbetering te bewerkstelligen. In eerste instantie wilt u dan kunnen signaleren waar de leerling moeite mee had. In het minst problematische geval had de leerling grote moeite met het zelf verzinnen van opgaven. Dit was echter geen doel, doch slechts een middel. Als dit voor uw leerling teveel is dan kan daar zijn psychiatrisch ziektebeeld achter zitten. Als u voorziet dat uw leerling te star is om op dit punt te veranderen, dan kunt u zich daarbij neerleggen.
Hoe dan ook dient de leerling in staat te zijn om de hierboven besproken typen opgaven op te lossen. Als u met een leerling probeert dit soort opgaven te maken en het lukt niet direct, dan is het mogelijk dat uw leerling moeite heeft zich in te leven in de voorgestelde problemen. Gebrekkige algemene ontwikkeling kan interpretatie van de opdrachten in de weg staan en het komt regelmatig voor bij kinderen met ASS. Om de leerling een beetje tegemoet te komen, kunt u concessies doen met betrekking tot de inkleding. Als een leerling bijvoorbeeld veel plezier beleefd aan formule-1 races, dan is er natuurlijk niets mis mee om een aantal opgaven op te hangen aan de recente races. Let u er dan wel op dat uw gegevens en opgegeven details kloppen, door ze bijvoorbeeld te ontlenen aan een bij de leerling bekende website. Als uw opdrachten namelijk in details afwijkt , dan bent u de ASS-leerling kwijt: die neemt u dan niet meer serieus. Lukt het een leerling ook met zijn hobby niet om de juiste hoofd- en bijzaken te onderscheiden, dan zal toch echt gebrekkig inzicht of een te star denkproces in het hoofd van de ASS-er een rol spelen. Daar dient door een multidisciplinair team op verschillende fronten structureel aan moeten worden gewerkt en het is zeer de vraag of het een dergelijke leerling binnen een reguliere school lukt om mee te komen.

En hoe verder?

Is een leerling bij wiskunde eenmaal in staat om op een adequate manier hoofd- en bijzaken te onderscheiden, dan staat u vervolgens voor de keuze om het traject voort te zetten. Als er progressie valt te boeken, dan gaat dat bij wiskunde relatief gemakkelijk. Dat betekent niet dat daarmee het probleem van het scheiden van hoofd- en bijzaken voor uw leerling helemaal is opgelost. Over het algemeen zal bij een ASS-leerling de transfer van het geleerde naar andere situaties niet zelfstandig plaatsvinden. Dit kan echter wel worden gefaciliteerd door bijvoorbeeld zelf op analogie te wijzen of een analogie concreet met de leerling toe te passen.
Hopelijk heeft u na lezing van het bovenstaande ideeën opgedaan. Bij de meeste leerlingen zal een kleine extra tijdsinvestering direct positief effect hebben. Een positief effect in de wiskundeles kan vervolgens helpen om ook op andere vlakken met de leerling vooruitgang te boeken. Wiskunde in de leerlingbegeleiding kan op deze manier een verrijking betekenen voor zowel de docent als de ASS-leerling.
Bij twijfel: doen!

Referenties

[1] (Red.) Zie de website van Programmagroep Brein en Cognitie (van de Universiteit van Amsterdam): *www.adhd-autisme.nl/watisass.htm*
[2] Tony Atwood (2007): *Hulpgids Asperger-syndroom*. Amsterdam: Nieuwezijds.
[3] J.C. Nipper (2004): *18 eeuwen meten en wegen in de Lage Landen*. Zutphen: Walburg Pers.
Zie voor een bespreking in *Euclides*: *www.nvvw.nl/media/files/euclides/80-4.pdf*
[4] Hans van Maanen: *Getallen in de krant*. In: *Euclides* 87 (Special 2012); pp. 14-16.

Over de auteurs

Bram Arens (e-mailadres: *b.arens@bureau-beckers.nl*) en Danny Beckers (e-mailadres: *d.beckers@bureau-beckers.nl*) waren werkzaam als wiskundedocent. Beiden zijn sinds een aantal jaren werkzaam bij Bureau Beckers te Nijmegen, hét expertisecentrum voor coaching van leerlingen en studenten met ASS of ADHD, en met een cognitieniveau vanaf havo.

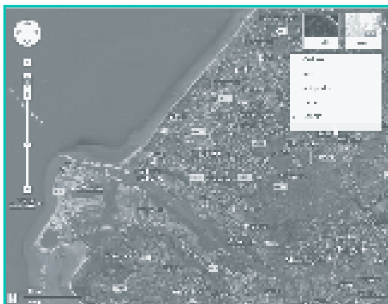
ICT in de wiskundeles

GOOGLE MAPS – DEEL 2

[Marc de Hoog]

In de vorige aflevering heb ik uiteengezet hoe ik in 2009, als onderdeel van mijn afstudeerwerk (Wiskunde@ELO, Lerarenopleiding Hogeschool Rotterdam), heb gezocht naar een meer praktische en meer moderne invulling van de lessen over plaatsbepaling en coördinaten en dat ik daarvoor Google Maps (het 'kaarten-programma' van Google; *http://maps.google.nl*) heb gekozen. In deze aflevering ga ik een stap verder en leg ik uit hoe de extra mogelijkheden, zoals de lagen Verkeer, Weer en Fietsen aangewend kunnen worden. Ik zal hierbij ook andere onderwerpen uit het curriculum aanstippen, omdat daarvoor genoeg aanknopings-punten zijn. Daarnaast besteed ik aandacht aan StreetView en werp ik een blik op het gebruik van de smartphone.

Klopt het eigenlijk wel?
Google Maps biedt mogelijkheden om in een levensechte context te werken aan integratie van onderwerpen. Ik geef een voorbeeld waarbij ik ook aandacht besteed aan de doelstelling *kritisch kijken naar gegevens / antwoorden / methoden*.



figuur 1 Google Maps – Satelliet view

1/ Rekenen aan een bovenaanzicht
a. Zoek in Google Maps (Satelliet view; ***zie figuur 1***) naar een bovenaanzicht van de school.
b. Hoe lang is de school op de kaart (in cm)?
c. Linksonder zie je een schaallijn. Wat is de schaal waarop de afbeelding wordt weergegeven?
d. Bereken met een verhoudingstabel hoe lang de school in werkelijkheid is.
e. Vraag aan de docent hoe lang de school is. Geef een verklaring voor de verschillen.

2/ Meten in het echt
a. Vraag de docent om een meetlint, ga naar buiten en meet de lengte van de school.
b. Zijn er verschillen met de werkelijke lengte? Verklaar de verschillen. Wat heb je gedaan om zo nauwkeurig mogelijk te meten?

3/ Op de foto
a. Maak een foto van de school met voor de school een liggende klasgenoot.
b. Hoe lang is de klasgenoot op de foto en in het echt? Zet deze gegevens in een verhoudingstabel.
c. Hoe lang is de school op de foto? En in het echt?

4/ Terugblik
Je hebt nu op verschillende manieren de lengte van de school bepaald.
a. Welke manier heeft je voorkeur? Waarom?
b. Welke manier is het meest nauwkeurig? Geef een verklaring.
c. Kloppen de gegevens die Google levert?

Bovenstaande opdracht zou ik niet zonder meer 'in de groep gooien', maar het maakt volgens mij wel duidelijk waaraan gedacht kan worden. Afhankelijk van het onderwerp dat centraal staat, kan meer nadruk gelegd worden op bijvoorbeeld schaal, lengtematen, verhoudingstabellen. Bovendien is het vrij eenvoudig te differentiëren naar niveau. Ik zou in mijn groepen (BB/KB 1 en 2) voorstructureren, duidelijk maken wat ik precies verwacht, de opdracht inkleden, tussenstappen vragen, niet alle opdrachten geven, etc. In havo-3 zou ik daarentegen waarschijnlijk de keuze maken een opdracht te geven die grote overeenkomst vertoont met de bovenstaande. Mijns inziens zijn dergelijke didactische keuzes echter enkel goed te maken als het leerdoel helder is en als helder is wat van een leerling op een bepaald moment verwacht mag worden: wat moet deze leerling – op dit moment – leren van deze les, opdracht, etc.?

Verkeer(d)?
De laag Verkeer (in Kaart view) biedt aanknopingspunten kritisch te kijken naar de data. Klopt de data van Google Maps eigenlijk wel? Hoe komt Google aan de verkeersinformatie? Kunnen we daarachter komen?
In een opdracht over de laag Verkeer (rechtsboven in het menu kan Verkeer geselecteerd worden) laat ik leerlingen allereerst voorbeelden zoeken van alle soorten verkeer die kunnen voorkomen: van zwart/bruin (langzaam rijdend) tot groen (snel rijdend). Vervolgens laat ik de leerlingen uitzoeken waar veel langzaam rijdend verkeer is en waar veel snel rijdend verkeer. Bovendien laat ik de leerlingen verklaringen bedenken. Het meest essentiële is om na te gaan of de bewering 'live verkeersinformatie' wel op waarheid berust. Allereerst vraag ik leerlingen een straat te zoeken die vanuit school te zien is. Klopt de kleur op de kaart met hetgeen je ziet? Daarna laat ik leerlingen een andere straat in het dorp opzoeken. Hoe komen we aan die gegevens? 'Je moeder woont daar en die wil je even *Whatsappen*? Goed idee.' Tot slot laat ik enkele beruchte verkeersknooppunten opzoeken.
Door het stellen van goede richtvragen kun je leerlingen al snel de link laten leggen met de file-informatie die leerlingen kunnen opzoeken en kunnen vergelijken met de gegevens op de kaart van Google.
Vervolgens vraag ik een lijstje te maken van zaken die kloppen en van zaken die niet kloppen en vraag ik daaruit een conclusie te trekken.
Wellicht vraagt u zich af wat dit met wiskunde te maken heeft. Ik kijk in dit geval naar de lange termijndoelen: uiteindelijk lijkt het mij gewenst als mijn leerlingen kritisch leren kijken naar data en niet alles zonder meer voor waar aannemen. Ik wil ook dat leerlingen gegevens met elkaar kunnen vergelijken (kaart Google Maps en

Weer

°C | °F km/u | mijl/u | m/s

figuur 2 Google Maps – Tekstdeel van de laag Weer

file-informatie) en daaruit conclusies kunnen trekken. Ik wil leerlingen stimuleren vindingrijk te zijn (even een moeder Whatsappen om aan gegevens te komen). En ook hier kun je weer interessante vragen stellen om tot een discussie te komen: Hoe weten we eigenlijk wat langzaam rijdend verkeer is? Wat is de gehanteerde definitie? Is dat noodzakelijk om te weten of is een globaal idee afdoende? Komen we dat binnen de wiskunde vaker tegen? Definities en globale ideeën? Zouden er patronen zijn in het verkeersbeeld? Kunnen we daarachter komen? (Linksonder kun je de live verkeersinformatie omzetten naar verkeer op dag en tijd.) Zou Google gebruik maken van patronen? En hoe werkt dat dan?
Daar is ook op 'hoog' wiskundig niveau genoeg plezier aan te beleven.

Niet weer?!

De laag Weer biedt aanknopingspunten om samen te werken met andere vakken. Hierop wil ik niet ingaan, maar ik wil enkel wijzen op de eenvoudige manier om van °C naar °F om te schakelen (links, in het Deelvenster; ***zie figuur 2***). Een goede rekenopgave is zo gemaakt. Ook deze laag biedt de mogelijkheid om gegevens van verschillende instanties te vergelijken.

Fiets 'm d'r in

De laag Fietsen kan gebruikt worden in de speurtocht of tijdens het maken van een routebeschrijving van huis naar school. Wellicht aardig om de leerlingen als organisator een fietstocht door de omgeving te laten uitzetten die aan bepaalde voorwaarden moet voldoen: Start bij school, na maximaal 5 km moet men een bezienswaardigheid tegenkomen, na maximaal 12,5 km moet een restaurant bezocht kunnen worden, etc. Uiteraard moeten de leerlingen gebruik maken van Google Maps. Als docent kun je eisen dat de leerlingen gebruik maken van de functie Routebeschrijving of van de schaallijn en de bijbehorende verhoudingstabellen.

Wat schat jij?

Na het maken van een routebeschrijving met Google Maps is het mogelijk de geschatte brandstofkosten op te vragen (onderaan de routebeschrijving). Door op de geschatte kosten te klikken is het mogelijk het voertuigtype, het brandstoftype en de brandstofprijs op te geven. Ik denk direct aan het zelf laten uitstippelen van de route, het laten opzoeken van de benzineprijs en aan het laten narekenen van de kosten met behulp van een verhoudingstabel. In mijn ogen alweer een aardige realistische rekenopgave. Ik denk ook aan een praktische opdracht over een transportbedrijf, aan het uitstippelen van de meest efficiënte route om verschillende plaatsen aan te doen (grafentheorie), aan het berekenen va n de bijbehorende brandstofkosten en aan een vergelijking tussen situaties met één vrachtwagen en situaties met twee vrachtwagens. Is dat goedkoper of duurder? Heeft de aanschaf van een tweede vrachtwagen zin?

StreetView

Een van de meest tot de verbeelding sprekende opties van Google Maps is de mogelijkheid StreetView te gebruiken (zet het gele mannetje ergens in de kaart en Google Maps schakelt over naar StreetView). StreetView geeft de wereld foto-realistisch weer: je staat als het ware in een straat. Het is eenvoudig te bedenken dat het volgen van een speurtocht op de computer veel meer leeft door het gebruik van StreetView. De leerlingen kunnen een speurtocht (zie Google Maps – Deel 1) volgen in StreetView. Daarbij kan de docent vragen stellen: 'Nu je op de Molenweg bent, loop je naar het einde. Daar staat een molen. Wat is de kleur van de deur van de molen?' De leerlingen kunnen dergelijke antwoorden verzamelen en zo tussentijds feedback krijgen: als gevraagd wordt om de kleur van deur van een molen en je ziet als leerling geen molen, dan weet je dat iets niet klopt. De leerlingen hebben hiermee een instrument in handen om hun leren tussentijds te sturen en daardoor succes te beleven. Als docent voorkom je dat leerlingen aan het einde steeds verkeerd uitkomen en daardoor gefrustreerd raken.

Smartphone

Binnenkort hoop ik met leerlingen te kunnen experimenteren met Google Maps op de smartphone. Veel van bovenstaande functies zijn namelijk toegankelijk op de mobiele telefoon. Daarbij komt de mogelijkheid om de navigatie van de mobiele telefoon te gebruiken om een route na te lopen. Het zou volgens mij geweldig zijn als leerlingen tijdens economie (een praktijkvak in klas 1 en klas 2 BB/KB van onze school) een bedrijf opzetten dat fietstochten organiseert en dat leerlingen met behulp van Google Maps een fietstocht uitzetten die aan verschillende voorwaarden voldoet. Uiteraard wil ik de voorwaarden zo kiezen dat er het nodige gerekend moet worden. En dat leerlingen tenslotte de tocht laden in hun smartphone en daadwerkelijk uitproberen. Als de docent economie in zijn opdracht het nodige verwerkt over de economische kant van het opzetten van een bedrijf, dan doen we hiermee een aardige poging om te komen tot vakintegratie ter bevordering van het leren in een levensechte leeromgeving.
Hoewel het te ver voert om hierop nader in te gaan, heb ik redenen om aan te nemen dat een levensechte omgeving bijdraagt aan het leerrendement. Natuurlijk staat ook hier weer de vraag centraal: wat moet een leerling – op dit moment – leren van deze les, opdracht, etc.?
Kortom, wat is het leerdoel?

Over de auteur
Marc de Hoog is docent wiskunde, rekenen en informatiekunde aan de Interconfessionele Scholengroep Westland. Daarnaast is hij auteur ICT bij *Moderne Wiskunde*. Hij volgt een studie informatica aan de Open Universiteit.
E-mailadres: *hgm@isw.info*

Een jaar W4Kangoeroe

DEEL 3, LOCALE KEUZES

[Ernst Lambeck]

Donderdag 15 maart 2012. Na alle voorbereidingen (zie [1] en [2]) kunnen de leerlingen aan de slag met de uitdagende opgaven. Elke deelnemende school organiseert W4Kangoeroe op haar eigen wijze. Op een aantal scholen is (in sommige leerjaren) deelname verplicht, op andere scholen kan het resultaat van W4Kangoeroe een meetellend cijfer opleveren. Nieuw dit jaar is voor het vmbo de mogelijkheid om in duo's te werken. 32 scholen maken hiervan gebruik, ongeveer 800 leerlingen gaan de opgaven samen met een partner te lijf. Het aantal duo's per school loopt uiteen van 1, 2 tot 70 en zelfs 103.

Betere scores

Meer dan 100 duo's dus op één school, op het H.N. Werkman College, vestiging Dalton i.o., te Groningen: hoe krijgt de school dat voor elkaar en hoe organiseert de school dat op de dag zelf?
Een aantal jaren geleden experimenteerde de school al eens met duo's in havo-4, bij wiskunde-B. Per toeval: de klas was in tweetallen bezig met praktische opdrachten. De leerlingen hoorden van Kangoeroe en wilden als onderdeel van de praktische opdracht daar graag aan meedoen. De docent, Hetty Luder, stond dit toe: 'Ik merkte dat leerlingen veel enthousiaster bezig waren. Zachtjes overleggen bleken ze opeens wél te kunnen. Niemand leverde al vroeg in, na 60 minuten ging de bel en alle leerlingen werkten in hun pauze gewoon verder. Het leek wel of ze de bel niet gehoord hadden…'
Deze positieve ervaring heeft ongetwijfeld een rol gespeeld bij het besluit om op de vmbo-afdeling van de Daltonvestiging van het H.N. Werkman College in duo's mee te doen. Ook hier ziet Hetty voordelen: 'Het voordeel is dat de leerlingen minder snel opgeven. Ze leren meer doorzetten.' Zij heeft het idee dat duo's minder snel een opgave overslaan omdat ze kunnen overleggen. Wat de ene leerling niet weet, weet de andere wel: 'Beiden onzeker, maar samen "durven" ze wel.'
De statistieken lijken dit beeld te bevestigen: bij wizSMART vulden de ruim 1600 duo's (basisschool en vmbo) minder vaak 'weet niet' in. Bij wizBRAIN vulden de duo's bij slechts twee van de dertig vragen vaker 'weet niet' in dan de individuele deelnemers. Overigens namen bij wizBRAIN slechts 20 duo's deel, een dusdanig klein aantal dat ik deze verder buiten beschouwing zal laten. Bij wizSMART twijfelden de duo's slechts bij een enkele vraag in grote getale. Met name opgave 15 (***zie figuur 1***) was een hersenbreker: bijna 34% wist met deze opgave geen raad. Verderop kom ik nog op deze opgave terug.
Ook werd er door de duo's bij wizSMART beter gescoord. De gemiddelde score lag bij vmbo-1 een kleine 6 punten hoger (52,04 vs. 46,07), bij vmbo-2 was dat iets meer dan 4 punten (bron: *Verslag W4Kangoeroe*; zie daarvoor [3]). Positieve uitschieters daarbij waren de volgende twee opgaven.

In een vliegtuig zijn de rijen met stoelen genummerd van 1 t/m 25. Er is geen rij met nummer 13. In rij 15 staan 4 stoelen voor passagiers, in alle andere rijen staan 6 passagiersstoelen. Hoeveel passagiers kunnen er in het vliegtuig zitten?

60% van de individuele deelnemers beantwoordde deze vraag goed, bij de duo's 72%.

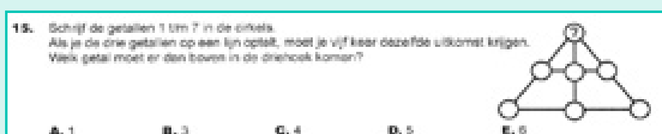
Een ballon blijft net zweven als er een mandje met 8 kg onder hangt. Twee van deze ballonnen blijven zweven als hetzelfde mandje met 18 kg er onder hangt. Hoeveel kg weegt het mandje?
Ruim 63% van de individuele deelnemers beantwoordde deze vraag correct; bij de duo's was dat bijna 74% (overigens was bij deze opgave een plaatje ter ondersteuning toegevoegd).

Slechts bij één opgave scoorden de duo's slechter dan de individuele deelnemers (24,3 vs. 23,6 %). Deze opgave staat ***in figuur 2***.

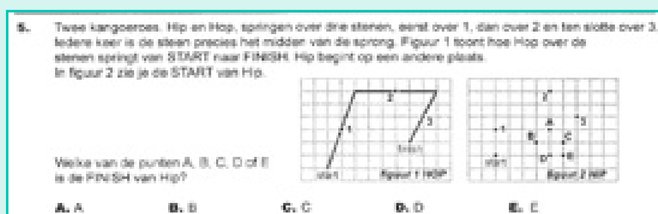
Organisatie

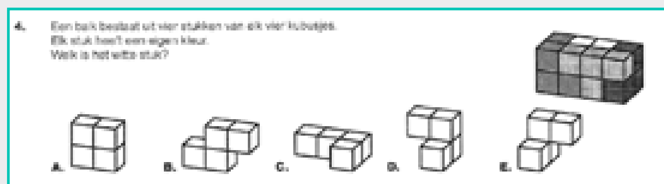
W4Kangoeroe in duo's vergt iets meer organisatie, om te beginnen bij het inschrijven. Hetty Luder vertelt: 'De leerlingen moeten bij ons in duo's. Ik moet namelijk van tevoren het aantal duo's en het aantal individuele deelnemers opgeven. Als ik de keus aan de leerlingen laat, dan moet ik ze dat al ver van tevoren vragen…' Op de wedstrijddag kiezen de leerlingen zelf hun partner, hetgeen voor hen vaak geen probleem is. Wel let Hetty er op dat de surveillerende docent de klas (en dus de onrustige leerlingen) kent. Over het algemeen kunnen dit niet allemaal wiskundedocenten zijn; W4Kangoeroe moet immers voor alle deelnemers tegelijkertijd worden afgenomen.
Op het H.N. Werkman College is W4Kangoeroe verplicht tot en met klas 3. De scores worden omgerekend naar een cijfer met een minimum van 4, dat als een schriftelijk meetelt. De verplichte deelname is logisch: anders zouden veel leerlingen zich vlak voor de wedstrijd alsnog terugtrekken omdat veel klasgenootjes zich niet hebben opgegeven. Of leerlingen die wel willen, geven zich vanwege de groepsdruk toch maar niet op. Nu het verplicht is, blijken de leerlingen dit heel gewoon te vinden, net als een sportdag.
Toch ziet Hetty wel een 'nadeel' aan duo's: 'Ik organiseer ook altijd een surveillantenwedstrijd, daar doen de meeste collega's enthousiast aan mee. Door de duo's hadden ze minder tijd voor hun eigen opgaven. Sommigen vroegen of ze thuis nog even door mochten werken en het morgen inleveren. Ik heb ja gezegd.'

figuur 1 wizSMART, opgave 15

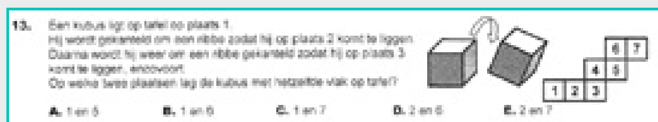


figuur 2 wizSMART, opgave 5





figuur 3 wizBRAIN, opgave 4



figuur 4 wizBRAIN, opgave 13

Open dag

Ook op het Newmancollege in Breda is deelname aan de Kangoeroe verplicht voor een deel van de leerlingen. Alle brugklasleerlingen doen mee, maar niet voor een cijfer. Leerlingen uit hogere leerjaren mogen meedoen op vrijwillige basis. De sectie wiskunde vindt het belangrijk dat de leerlingen plezier hebben in het maken van ongewone, uitdagende opgaven. Dit komt ook tot uiting in de 'Kangoeroewedstrijd' die op de jaarlijkse open dag wordt georganiseerd. Bezoekende leerlingen uit de groepen 7 en 8 kunnen zich dan buigen over een vijftal Kangoeroeopgaven van vorige jaren. De prijs? Deelname aan de *echte* W4Kangoeroe op het Newmancollege: uit de foutloze inzendingen worden 10 basisschoolkinderen geloot, die hiervoor een uitnodiging ontvangen. W4Kangoeroe gebeurt natuurlijk onder schooltijd, ook voor deze kinderen. Zij moeten dus van hun basisschool toestemming krijgen om voor W4Kangoeroe naar het Newmancollege te gaan. Om dit te regelen wordt ook de school een brief gestuurd, alsmede een kopie van de uitnodiging. Meestal geeft de basisschool dan zonder problemen toestemming, in een enkel geval wordt zelfs enthousiast gereageerd.
De jonge gasten maken de voor hen bestemde versie, dus wizSMART. Na afloop worden ze getrakteerd op een glaasje fris met een koekje en wordt nog even nagepraat. Meestal geven de kinderen dan aan dat ze 'het spannend vonden, maar ook wel een eer' om op het Newmancollege mee te mogen doen. Ook wordt dan gediscussieerd over de opgaven: welke goed te doen waren, welke te moeilijk. Opgave 15 werd in maart jl. ook door deze kinderen als moeilijkste genoemd. De helft van de kinderen had de opgave niet gemaakt, van de andere helft had slechts één van de kinderen de juiste oplossing. Zijn aanpak: 'Gewoon wat proberen, dan ontdek je dat het 4 (antwoord C) moet zijn.'

Spannend

Tomas kijkt ook met veel plezier terug: 'Ik vond het een leuke ervaring, zeker toen later bleek dat ik het ook nog eens goed had gedaan.' In 2003 deed hij, leerling in groep 7, op het Newmancollege mee. Succesvol: hij werd gedeeld 2e in de landelijke rangschikking, een mooie beloning voor het idee om basisschoolkinderen de kans te bieden mee te doen aan Kangoeroe. Voor Tomas was Kangoeroe niet spannend, maar '… om met je 10 jaren door de middelbare school te lopen, dat was pas spannend!' Het rekenen op de basisschool was voor Tomas saai, hij liep flink voor op de rest van de klas en had daarom een eigen methode, zat dus altijd alleen. Kangoeroe was daarom leuk: 'Het idee van de opgaven was voor mij altijd een puzzeltje, vaak was zeker de laatste reeks opgaven heel uitdagend.' Intussen zijn we bijna 10 jaar verder, Tomas studeert nu. Helaas geen wiskunde. Volgend academisch jaar wachten zijn eerste co-schappen…

Tot slot

Na afloop van 75 minuten puzzelen op het Newmancollege vertelden Bastiaan, Stijn (beiden 2-vwo technasium) en Emma (4-vwo NT) kort over hun ervaringen met W4Kangoeroe 2012. Bastiaan en Stijn (wizBRAIN) vonden beiden opgave 4 (***zie figuur 3***) leuk. Stijn vond ook opgave 13 (***zie figuur 4***) mooi. Hij loste deze opgave op door 'in gedachten de genummerde vierkantjes om te vouwen tot een kubus'. Bastiaan vond (de logica-) opgave 15 leuk:

De getallen 2, 5, 7 en 12 zijn op vier kaarten geschreven. Aan de achterkant van deze kaarten staan opmerkingen geschreven:
"deelbaar door 7",
"kleiner dan 10",
"oneven",
"groter dan 100".
Geen van de vier opmerkingen past bij het getal op de voorkant van de kaart.
Welk getal staat op de voorkant bij de opmerking "groter dan 100"?

Hij loste deze opgave correct op door te redeneren. De laatste opgaven uit de serie vonden beide jongens erg lastig. Vaak werd dan wat geprobeerd, waarna er (helaas) maar in het wilde weg een antwoord werd gekozen. Emma (wizPROF) vond opgave 14 erg leuk:

Drie meisjes houden een hardloopwedstrijd.
Vier toeschouwers doen elk een voorspelling.
De eerste: "Lisa of Sofie gaat winnen."
De tweede: "Rachida eindigt achter Sofie."
De derde: "Sofie eindigt vóór Lisa of ze wordt laatste."
De vierde: "Sofie of Rachida wordt tweede."
Na afloop van de race blijken alle voorspellingen goed te zijn.
In welke volgorde kwamen de meisjes over de finish?

Opgaven met een rekenkarakter kon ze minder appreciëren, bijvoorbeeld de volgende twee opgaven:

Het getal $2^{59} \cdot 3^{4} \cdot 5^{53}$ *eindigt op een aantal nullen.*
Wat is het laatste cijfer vóór al deze nullen?

We hebben een lijst opeenvolgende positieve gehele getallen. De lijst begint met 1. Dus 1, 2, 3, enzovoort. In totaal heeft de lijst 231 cijfers.
Wat is het laatste getal van deze lijst?

Emma is een sportief meisje, ze doet onder meer aan wielrennen en triatlon. Misschien is dat de reden voor haar voorkeur voor een opgave als 14 (zie boven)? Of zou het toch de logica zijn? Hoe dan ook, Emma vindt W4Kangoeroe nog steeds leuk, evenals Bastiaan en Stijn. Alle drie zijn steevast van plan om ook op **21 maart 2013** weer van de partij te zijn.
Kiest u er ook voor om weer mee te doen? De voorbereidingen zijn al in volle gang!

Noten

[1] Een jaar W4Kangoeroe / deel 1. In: *Euclides* 87(5), maart 2012, pp. 195-197.
[2] Een jaar W4Kangoeroe / deel 2. In: *Euclides* 87(7), juni 2012, pp. 309-311.
[3] Zie: *www.w4kangoeroe.nl*
Verslag: *www.w4kangoeroe.nl/kangoeroe/Downloads2012/verslag2012.pdf*
Statistiek: *www.w4kangoeroe.nl/kangoeroe/2012/opgaven/statistiek%20 2012.pdf*

Over de auteur

Ernst Lambeck is docent wiskunde aan het Newmancollege te Breda. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides* en voorzitter van de Nederlandse Opgavecommissie van de Kangoeroe.
E-mailadres: *elambeck@newmancollege.nl*

Waar zie je het groeital?

Is e ook te vinden zónder differentiëren?

[Hessel Pot]

Met het cirkeltal π zijn we meer vertrouwd dan met die 2,71828…. Want π kun je zien aan elke rond voorwerp, aan elke ronde boom (z'n middellijn gaat ruim drie keer langs z'n omtrek; bij de ingeschreven zeshoek gaat het precies drie keer); terwijl er voor de introductie van e een veel omslachtiger uitleg nodig lijkt. Of kan dat toch óók eenvoudig? We doen drie pogingen om te laten zien waar een gewoon mens dat e-getal kan tegenkomen.

Poging I. Kroosjes groeien sneller dan je denkt

Om π te kennen moet je weten wat het verschil is tussen een zeshoek en een cirkel. En om e te kennen moet je weten wat het verschil is tussen enkelvoudige (lineaire) groei en samengestelde (organische) groei.
Het bekende verhaal van de kroosjes in de vijver: vergeet niet dat nieuwgevormde kroosjes zelf óók weer productief zijn.
Het getal e heeft te maken met het verschil tussen die beide soorten groei. En wel als volgt.
Een beginhoeveelheid kroos groeit (via organische groei) aan tot z'n **e-voud**, in de tijd waarin die beginhoeveelheid ZOU zijn aangegroeid tot z'n **2-voud** ALS kindkroosjes zelf geen groeivermogen hadden (dus via lineaire groei).
Anders gezegd, op het moment waarop de éérste generatie nakroost even groot is als de beginhoeveelheid, is het 'organisch surplus' (al het nakroost van die eerste generatie) gelijk aan het 0,718…-voud van de beginhoeveelheid.
Bij lineaire groei vertonen gelijke tijdsintervallen dezelfde absolute groei, bij organische (exponentiële, cumulatieve) groei vertonen gelijke tijdsintervallen dezelfde relatieve groei.
Bij organische groei geldt dus ook: op het moment waarop de éérste generatie nakroost het n-voud is van de beginhoeveelheid, is het totaal aangegroeid tot het e^n-voud van de beginhoeveelheid.
Dat e-getal hoort dus bij élk exponentieel groeiverschijnsel.

Poging II. Direct cumulatief rente-op-rente

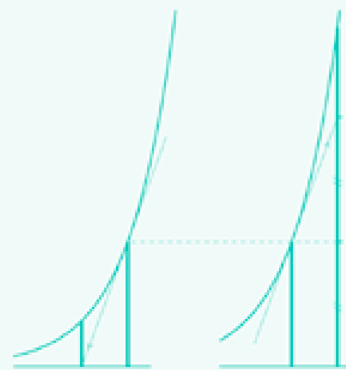
Je kunt ook kijken naar de rente op spaargeld. Stel er is een bank die een enkelvoudige rente uitkeert van (maar liefst) 100 procent na verloop van één jaar. Bij een éérdere opname wordt de rente bepaald, evenredig aan de verstreken tijd.
Elke slimmerik heeft wel eens bedacht dat hier mogelijk een kans ligt om heel rijk te worden. Stel hij legt 100 euro in. Na zes maanden logt hij in bij z'n bank, vraagt het saldo-plus-rente op (150 euro), en legt dat onmiddellijk weer in. Na twaalf maanden bezit hij dan geen 200 euro, maar 200 + 25 euro. Dat is leuk! Dat gaat hij dus elke maand doen, nee elke dag… En hij programmeert z'n pc om het elke milliseconde te doen. Misschien is hij dan na een jaar wel de rijkste van de wereld! Dat valt echter (een beetje) tegen; deze slimmerik ontvangt geen oneindige rente. In plaats van de 200 euro na één jaar bij enkelvoudige rente, krijgt hij … 271,82 euro bij ideale cumulatieve rente (directe rente-op-rente).
Je kunt dus zeggen: e is het extra-getal.
Het e-getal geeft aan hoeveel extra rente je krijgt als je kiest voor ideale samengestelde interest in plaats van enkelvoudige interest.
Banken zorgen er wel voor dat spaarders deze truc niet gaan uithalen. Bijvoorbeeld door bij elke bijschrijving van rente een vast tariefje te rekenen. Of door de uit te betalen rente niet volledig recht-evenredig te laten zijn met de tijdsduur vanaf de inleg. De regels hierna gaan daar nog even wat verder op in.

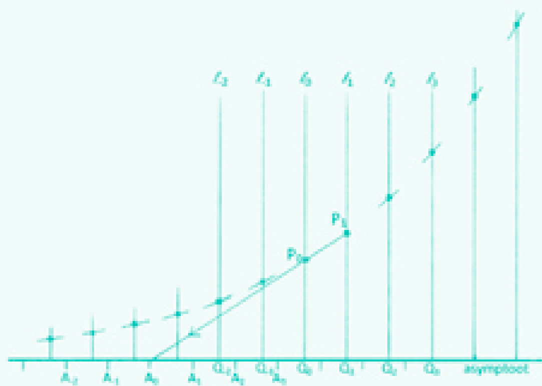
Als je bij een inleg K en een rentepercentage p na een vol jaar $K(1+\frac{p}{100})$ mag opnemen, dan kun je na een hálf jaar nog *niet* precies (het 'rekenkundig gemiddelde') $K(1+\textbf{half}\cdot\frac{p}{100})$ opnemen, maar alleen het wat mindere ('meetkundig gemiddelde') $K\times\textbf{wortel}(1+\frac{p}{100})$.
Als die inleg + halfjaarsrente over het twééde halfjaar nogmaals met dezelfde factor $\sqrt{(1+\frac{p}{100})}$ aangroeit, wordt het na een vol jaar:
$K\times\sqrt{(1+\frac{p}{100})}\times\sqrt{(1+\frac{p}{100})}=K(1+\frac{p}{100})$
Dus juist een jaarrente van p procent.
In plaats van de halfjaar-factor $\sqrt{(1+\frac{p}{100})}=(1+\frac{p}{100})^{\frac{1}{2}}$ kan de bank ook als dag-factor $(1+\frac{p}{100})^{\frac{1}{365}}$ gebruiken.
Het rekenwerk om te komen tot het uit te betalen bedrag wordt op deze manier heel veel lastiger dan met de traditionele jaarlijkse rente. Vroeger was dat een enorm bezwaar, maar voor onze huidige computers is het dat natuurlijk niet meer.

Poging III. e in de groeilijn-figuur

In figuur 1 is (tweemaal) een willekeurige *groeilijn* getekend. Dat is een kromme lijn (aan één uiteinde 'rakend' aan een asymptoot) die – opgevat als een functie-grafiek met die asymptoot als x-as – bepaald is door de volgende voorwaarde:
bij élke tweetal *gelijke* (en gelijkgerichte) intervallen op de x-as, hoort een *gelijke relatieve* groei in de y-richting.
De raaklijn in een willekeurig punt van die groeilijn is in de eerste figuur naar onder toe doorgetrokken tot aan de asymptoot, en in de tweede figuur tot waar die de dubbele afstand tot de asymptoot bereikt.
De lengteverhouding van de dikgetekende verticale lijnstukken (grootste staat tot kleinste) is voor élke groeikromme en voor élke raaklijn *altijd even groot!*
In vijf decimalen benaderd: 2,71828. Sinds Euler gebruikt men voor dit *groeilijngetal* of *groeital* de letter e.
Het constant zijn van de aangegeven verhoudingen hangt samen met het feit dat de lengte van het as-segment tussen

figuur 1 De groeilijn-constante e. Bepaald – als verhouding van twee hoogtes – door een willekeurige raaklijn aan een willekeurige groeikromme. Zowel vanaf het raakpunt schuin omlaag tot aan de as, als schuin omhoog tot aan de dubbele hoogte.
De rechter figuur sluit aan bij de contextvoorbeelden over kroosjesgroei en rentegroei.





figuur 2 Het op papier construeren van een serie punten …, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, … van een door twee punten (P_0 en P_1) en de asymptoot gegeven groeikromme, gaat als volgt.
- Teken onderaan de asymptoot (X-as).
- Teken een serie verticale lijnen op gelijke afstand d van elkaar (op ruitjespapier staan die er al). Noem ze …, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, … , en hun snijpunten met de as …, Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2, …
- Kies op l_0 willekeurig punt P_0, en op l_1 willekeurig punt P_1.
- Teken de lijn door P_0 en P_1 en noem z'n snijpunt met de as A_0.
- Geef op de as aan de punten …, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, … , weer allemaal op dezelfde afstand d van elkaar.

Andere punten van de groeikromme zijn nu snel gevonden:
P_2 is het snijpunt van l_2 met lijn A_1P_1 ; P_3 is het snijpunt van l_3 met lijn A_2P_2 ; et cetera.
En naar de andere kant evenzo:
P_{-1} is het snijpunt van l_{-1} met $A_{-1}P_0$; P_{-2} is het snijpunt van l_{-2} met $A_{-2}P_{-1}$; et cetera.
Waarom is deze constructie correct? Oftewel: waarom is de verhouding van twee opvolgende 'functiewaarden' steeds hetzelfde? Omdat de verhouding van de verticale lijnstukken P_nQ_n en $P_{n+1}Q_{n+1}$ gelijk is aan die van de horizontale lijnstukken A_nQ_n en A_nQ_{n+1} (gelijkvormige driehoeken!). De lengte van die horizontale lijnstukken is voor elke n hetzelfde, en dus ook hun verhouding.

raaklijnsnijpunt en raakpuntprojectie (de *subtangent* van het raakpunt ten opzichte van een basisrechte) niet afhangt van de keuze van het raakpunt op de groeikromme. Verplaatsing van het raakpunt kan gezien worden als een verticale uitrekking van de figuur ten opzichte van de as, gevolgd door een horizontale verschuiving. Daarbij blijft een groeilijn een groeilijn, een rechte een rechte, een raaklijn een raaklijn. En een lengteverhouding van verticale lijnstukken verandert niet.

Hoe vind je de eerste paar decimalen van het groeital?
Door het zelf tekenen van een groeikromme, met een raaklijn. En het opmeten van de hoogte boven de as, zowel in het raakpunt als in het as-snijpunt. En dan natuurlijk nog een staartdeling. ***Figuur 2*** geeft details bij het tekenen van een groeikromme. Sommigen zullen in staat zijn (ik niet) om dat teken- en meetwerk door hun computer te laten doen.

Niks ingewikkelds… Maar alleen…

Niks afgeleide functies,
niks heel speciaal geval,
niks limietbenadering,
niks oneindige rijen,
niks machtsverheffen met reëel grondtal en reële exponent.
Maar zichtbaar in concrete verschijnselen, gelinked aan het verschil tussen samengestelde groei en enkelvoudige groei. Eén willekeurige raaklijn volstaat.

Pas op met de term 'grondtal'

De term 'grondtal' hoort bij de machtsverheffingsoperatie. Het gebruik van die term in een aanduiding als 'het grondtal van een exponentiële functie' leidt al gauw tot problemen. Want vragen als de volgende drie zijn niet zonder meer te beantwoorden.
1/ Welk jaarrente-percentage hoort bij een exponentiële kapitaalgroei met e als grondtal?
2/ Wat is het grondtal van een exponentieel verval met halfwaardetijd t ?
3/ Hebben de functies $x \to 2^{3x+5}$ en $x \to 2^{5x+3}$ hetzelfde grondtal?

Poging IV. Met één keer differentiëren

Een korte weg naar het groeital e gaat nog als volgt, nu mét differentiëren.
Stel je hebt een willekeurige cumulatieve/exponentiële functie C. Een kenmerk van zo'n functie is z'n *groeitijd* (of: *vervaltijd*), gedefinieerd als het – niet van de keuze van een origineel t afhankelijke – quotiënt:

$$\frac{C(t)}{C'(t)}$$

waarna nog een deling het groeital e levert:

$$\frac{C(\mathit{groeitijd})}{C(0)} = \mathrm{e}$$

Klaar.
Deze weg is aanzienlijk korter dan de door Rob van Oord beschreven methode in de 'Special 2012' van *Euclides* (pag. 170 e.v.). Hij itereert via een rij van testfuncties, waarbij in elke nieuwe stap 'wat hellingen gemeten en benaderd' moeten worden. Terwijl hij via één hellingbepaling van bijvoorbeeld de functie $V: x \to 2^x$ voor $x = 0$, met:

$$\frac{V(\frac{V_0}{V'_0})}{V_0} = 2^{\frac{1}{0{,}693}}$$

al bij e had kunnen uitkomen.

Een verband tussen e en π

Ik doel hier *niet* op de mysterieuze formule $e^{i\pi} + 1 = 0$ waarin de machtsnotatie niks met herhaald vermenigvuldigen te maken heeft.
Kijk echter naar de speciale (archimedische) spiraalfiguur waarbij de kromme overal een hoek van 45° met de centrumrichting maakt. Bij een beweging langs de spiraal naar buiten over een centrumhoek van 180° groeit de voerstraal met factor e^{π}, en bij een centrumhoek van één radiaal met factor e.
De verklaring hiervan berust op het feit dat een archimedische spiraal de grafiek in poolcoördinaten is van een organisch groeiproces: bij even grote centrumhoeken/tijdsintervallen hoort *relatief*-gelijke voerstraalgroei.
In zekere zin is zo'n archimedische spiraal een mooiere weergave van samengestelde groei dan de figuur in rechthoekscoördinaten. Want die laatste kromme wordt naar beide uiteinden toe steeds rechter (de kromtestraal van de kromme wordt steeds groter), maar dat betekent dat er ergens in het duidelijk kromme gedeelte van de kromme een punt is waar z'n kromtestraal minimaal is. In de figuur is dat een bijzonder punt, maar in de werkelijkheid van het groeiproces is zo'n bijzonder moment in de tijd helemaal niet aan te wijzen. Dat vind ik raar. De spiraalfiguur kent een dergelijk 'knikpunt' niet.

Over de auteur
Hessel Pot (1942) is werkzaam geweest als wiskundeleraar en als hoofdredacteur van het tijdschrift *Pythagoras*. Hij is grootverzamelaar van oude schoolboeken wiskunde en rekenen; boeken die hij gebruikt bij het zoeken naar antwoorden op vragen van het soort als in dit artikel. Een catalogus van die collectie is te vinden op internet.
E-mailadres: *h.n.pot@hetnet.nl*

Van Kring naar Werkgroep

[Harm Jan Smid]

Op een regenachtige zaterdagmiddag ergens in 1995 vonden twee bijeenkomsten met een historisch karakter plaats. In een grote zaal in de Utrechtse Uithof was een bijeenkomst gewijd aan de geschiedenis van de wiskunde en het gebruik daarvan in het onderwijs. Het was een middag speciaal voor leraren, en die waren er ook in groten getale op afgekomen. Sprekers waren onder andere John Fauvel, Marjolein Kool en Jan van Maanen. Het was een mooie middag, maar toch stapte de schrijver van dit stukje al weer halverwege de middag in de trein, op weg naar een bijeenkomst in het Nederlands Onderwijsmuseum in Rotterdam. Net op diezelfde middag – dat zal je altijd zien, natuurlijk – had Ed de Moor daar een bijeenkomst georganiseerd gewijd aan de geschiedenis van het Nederlandse Reken- en WiskundeOnderwijs. Hijzelf hield een inleiding over Jan Versluys, en de conservator van het museum, Thijs van Ruiten, vertelde wat over dat museum en gaf ons een rondleiding. De belangstelling was hier niet zo massaal als in Utrecht, maar leuk en interessant vonden de deelnemers die middag wel.

De bijeenkomst in Utrecht was eenmalig, maar die in Rotterdam niet. Behalve het doel de aanwezigen iets belangwekkends te bieden, had organisator Ed de Moor ook nog een andere bedoeling. Hij was al jaren zeer geïnteresseerd in de geschiedenis van het reken- en wiskundeonderwijs en het delen en uitwisselen van kennis op dat gebied. Hij speelde al een tijdje met het idee daar een wat meer vaste structuur aan te geven. Aan het eind van de middag kwam dan ook de vraag op tafel wie zou willen meewerken aan zo'n structuurtje – het verkleinwoord is niet toevallig want al te zwaar moest het nu ook weer niet worden. Nu, vrijwilligers waren er gelukkig wel, en zo werd die middag de basis gelegd voor wat al spoedig de *Historische Kring Reken-WiskundeOnderwijs* zou gaan heten, of te wel de HKRWO.

De eerste echt door de HKRWO georganiseerde bijeenkomst, symposium nummer 2, vond plaats op 1 juni 1996 onder de titel *Reken- en WiskundeOnderwijs: Waarom?* Sprekers van het eerste uur waren Ed de Moor, Harm Jan Smid, Adri Treffers, Frederik van der Blij en een buitenlandse spreker, Siegbert Schmidt. De belangstelling was heel behoorlijk, de toehoorders tevreden en de jonge HKRWO besloot, met (financiële) steun van de NVvW, NVORWO en het Freudenthal Instituut, door te gaan met haar activiteiten.



foto 1 Twee HKRWO'ers van het eerste uur: Marjolein Kool en Ed de Moor. Bij welk symposium deze foto gemaakt werd is niet bekend, maar vermoedelijk wel heel wat jaren geleden!

Er volgde een lange reeks van symposia, steeds georganiseerd door Ed de Moor, Marjolein Kool, Danny Beckers en Harm Jan Smid, maar natuurlijk ook geregeld met hulp van anderen. Eigenlijk waren het altijd wel geslaagde bijeenkomsten. Ik noem twee hoogtepunten: het optreden van David Singmaster over *Recreational Mathematics* in de Middeleeuwen en de Renaissance, en het video-interview van Fred Goffree met Wim Bos over het ontstaan van de befaamde serie *Gids voor…,* die Bos samen met Paul Lepoeter schreef. Afgelopen mei was het 18e symposium, zoals altijd op de Hogeschool Domstad (al heet dat gebouw nu een beetje anders), met 42 deelnemers. Behalve de symposia kwamen er een website en een Nieuwsbrief die aan ruim 150 geïnteresseerden wordt gestuurd, en met de financiën is alles in orde. Kortom: een kerngezonde club, die HKRWO!

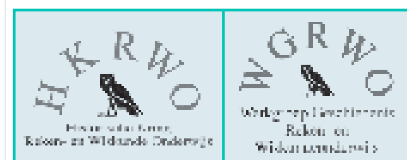
En toch houdt die club na 17 jaar op met bestaan. Niet omdat er geen toekomst in de geschiedenis zou zitten, maar juist om die toekomst veilig te stellen. De HKRWO dreef eigenlijk helemaal op de hiervoor genoemde vier personen, en al is dat altijd nog goed gegaan, het zou toch verstandiger zijn die basis wat te verbreden. En de HKRWO was ook een geheel losstaand clubje, geen onderdeel van wat voor organisatie dan ook. Heerlijk, zo veel vrijheid natuurlijk, maar toch ook een beetje griezelig. Juist met het oog op de continuïteit van dit werk zou een organisatorische inbedding in een groter geheel misschien toch wel beter zijn.

Het was niet zo moeilijk daar iets voor te bedenken. De NVvW kent het fenomeen (permanente) werkgroepen, en het bestuur van de NVvW was direct enthousiast toen het idee geopperd werd om de Historische Kring om te zetten in een Werkgroep van de vereniging. Daar is inmiddels officieel toe besloten, en dus: exit HKRWO, en welkom Werkgroep Geschiedenis van het Reken-WiskundeOnderwijs, of te wel de WGRWO. U ziet, het scheelt maar twee letters…!

Voorlopig bestaat de werkgroep uit dezelfde vier personen die u hiervoor al heeft zien langskomen, maar natuurlijk zullen daar nieuwe mensen bijgezocht gaan worden. Als u interesse hebt, meldt u dat dan vooral bij de auteur van dit stukje; mijn email vindt u hieronder bij mijn biografische gegevens!

De website, die bij het Freudenthal Instituut was ondergebracht is, is inmiddels naar de website van de vereniging verhuisd.

Hopelijk zal op termijn ook een oud plan verwezenlijkt kunnen worden: dat op de website van de werkgroep niet alleen het een en ander te vinden is over de activiteiten van die groep, maar ook over de geschiedenis van het reken- wiskundeonderwijs zelf. En verder kan de nieuwe werkgroep misschien nog wat meer dan vroeger functioneren als centraal punt voor iedereen die, op wat voor manier dan ook, zich bezig houdt met of geïnteresseerd is in de geschiedenis van het reken- wiskundeonderwijs.



figuur 1 Tussen oud en nieuw zitten altijd overeenkomsten én verschillen. Ook in dit geval is dat niet anders en daarom de volgende klassieke opdracht: zoek de verschillen!

Natuurlijk zal niet opeens alles veranderen. Ook als onderdeel van de NVvW zullen we aandacht blijven houden voor de geschiedenis van het rekenonderwijs en dus contacten blijven onderhouden met de

NVORWO, de club die het rekenonderwijs ter harte gaat. Trouwens, nu het rekenen weer officieel op het hele voortgezet onderwijs een plaats heeft gekregen, is daar des te meer reden voor!
Ook in 2013 zullen we op een zaterdag in mei weer een symposium, nummer 19, organiseren. Precieze datum, onderwerpen en sprekers volgen nog. Wellicht gaat de nieuwe werkgroep op termijn ook andere activiteiten ontplooien, natuurlijk zullen we daar dan over berichten. Hoe dan ook: we hopen velen van u bij onze activiteiten te mogen ontmoeten. U bent van harte welkom!

Over de auteur
Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is voorzitter van de Werkgroep Geschiedenis van het Reken-WiskundeOnderwijs.
E-mailadres: *h.j.smid@ipact.nl*

NASCHRIFT van de Redactie
In het artikel memoreert Harm Jan Smid het laatste (18e) symposium van de HKWRO, dat in mei 2012 plaatsvond. Daar hebben de aanwezigen kunnen genieten van zeer interessante voordrachten van Harm Jan Smid, Aad Goddijn, Martin Kindt en Brugt Krol.
Een aardige anekdote, waarmee Brugt Krol zijn voordracht over Rekenkunde verlevendigde, willen we u niet onthouden. Het verhaaltje komt uit Zuid-Afrika en is overgenomen uit een kinderstijdschrift 'Het jonge volkje' (1946):

Een moeilijke som.
Onlangs werd die volgende briefje afgegegé aan die skooljuffrouw van Polfontein:

Waarde juffrouw,
Dit spijt mij, dat Jannie nie vandaag skool-toe sal kom kan nie; hij is met sijn vader saam om tijd te hou.
Die som, wat U Jannie gistera'end gegé 't, was:
'Als die sloot 1,5 mijl lang is, hoe lang sal dit 'n man neem om die afstand 26 ½ maal af te loop, als sijn gemiddelde gang 3 7/8 mijl per uur is?'
Jannie is nog nie 'n man nie, en omdat Pa die énigste man is in hier die huis, moes hij gaan. Hulle is vanmoré om vier uur weg, en Pa het gesè, hij sou die som klaarmaak in één dag, als hij kon, maar hij wis nie, of hij dit sou volhou nie.
Als u weer enige informasie van die aard wil hè, maak 't dan alsublief tog maar een 'vrouw', dan kan ik die som self maak, en Pa kan naar sijn werk gaan.'

Didactiek? Laat mij maar gewoon lesgeven!

DEEL 1

[Heiner Wind en Anne van Streun]

Inleiding
[Heiner Wind]

Op 8 juni jl. is in Utrecht het *Handboek wiskundedidactiek* ten doop gehouden. Op deze bijeenkomst, die een feestelijk karakter had, werd het door de vele aanwezigen enthousiast ontvangen. De uitgever had in vergelijking met andere manifestaties al een overdosis boeken meegenomen, maar was binnen de kortste keren door de voorraad heen. Tot troost mochten de overige vele belangstellenden het boek alsnog tegen de gereduceerde prijs bestellen. De eerste oplage is inmiddels geheel uitverkocht.



Dit handboek verdient in uw vakblad vanzelfsprekend de nodige aandacht.
Het meest recente 'standaardboek' over wiskundedidactiek stamt uit 1974 en is van de hand van Joop van Dormolen. De wetenschappelijke kennis over leren en onderwijzen van wiskunde is sinds 1974 enorm uitgebreid en de schrijvers van het handboek beogen deze kennis toegankelijk te maken voor iedere wiskundedocent.
Ik citeer een gedeelte van de rugzijde van het boek:
Het Handboek wiskundedidactiek biedt ondersteuning aan de wiskundeleraar, die actief aan de slag wil met het verbeteren van het eigen onderwijs. Geen teksten die voorschrijven wat de docent zou moeten doen en hoe dan, maar wetenschappelijk onderbouwde informatie, geïllustreerd met inspirerende voorbeelden om de didactische bekwaamheid verder te ontwikkelen.
Dat ziet er veelbelovend uit. Het boek zelf ook: een mooi verzorgde uitgave in de Epsilon-reeks (deel 72). Ik heb het boek meegenomen als vakantielectuur. Het is natuurlijk geen boek dat je met rode oortjes in één ruk uitleest, maar het heeft wel veel te bieden.
In een artikel in *Euclides* nummer 5 van de vorige jaargang heb ik enige zorg uitgesproken over de toegankelijkheid van het nog te verschijnen *Handboek* na het bijwonen van de ELWIeR-conferentie. Dat heeft geleid tot vruchtbaar overleg met Anne van Streun met als uitkomst dat we samen een serie artikelen in *Euclides* gaan maken. We willen laten zien wat het praktisch nut van het *Handboek* kan zijn voor de 'gewone' docent. Daarnaast worden de gebruikers van het *Handboek* nadrukkelijk uitgenodigd om eigen bijdragen te leveren in het kader van 'Kleine Didactieken': een kort verslag vanuit de eigen lespraktijk, waarin naar voren komt wat de meerwaarde van het gebruik van het *Handboek* voor het wiskundeonderwijs kan zijn. In het eerste artikel, dat u hierna aantreft, wordt het kader aangegeven. Het vormt in feite de vlag die de lading van het *Handboek* dekt.

Deel 1
Wiskundedidactiek, handreiking voor onderwijsverbetering
[Anne van Streun]

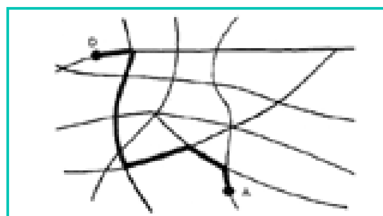
Instap
» 'Meneer wat is a^3 keer a^2 ook al weer? a^5 of a^6? Nee, niet uitleggen, gewoon het antwoord.'
» Is $\int_a^b f(x)dx$ gelijk aan $\int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx$? Waarom wel of waarom niet?
» Een lesfragment – De les gaat over machten in breuken en de leerlingen hebben in groepjes gewerkt aan de drie volgende opgaven. De leraar loopt met de klas hun antwoorden na.

(a)… $\frac{m^6}{m^2}$ (b)… $\frac{x^3y^7}{x^2y^6}$ (c)… $\frac{x^5}{x^5}$

Vraag a) Paul? m^4.Ja, dat is goed. Iemand iets anders?
Vraag b) ??… Ik hoor xy. Hoe deed je dat? Aftrekken? Ja, dus 3 – 2 voor de x en 7 – 6 voor de y.
Vraag c) ??… De antwoorden zijn 0, 0 gedeeld door 0, x, niets. De leraar schrijft de breuk over, vraagt hoeveel x-en er staan, en vraagt 'Wat nu?'. Leerlingen zeggen *wegstrepen*, leraar zegt ook *wegstrepen* en nu staat er dit op het bord: $\frac{\not{x}\cdot\not{x}\cdot\not{x}\cdot\not{x}\cdot\not{x}}{\not{x}\cdot\not{x}\cdot\not{x}\cdot\not{x}\cdot\not{x}}$.
Leraar: 'Wat heb ik nu over?' Leerlingen: '0; 0 gedeeld door 0; weg is weg.'
De leraar protesteert, schrijft op het zijbord 5 gedeeld door 5, dat is dus 1. Nu volgt een periode van verwarring, waarin de leerlingen geen verband zien tussen zijn voorbeeld en de opgave met al die x-en. De leraar sluit deze episode af met de opdracht om in het schrift te schrijven: $a^0 = 1$.

Deze drie voorbeelden geven een indruk van de inhoud van het *Handboek wiskundedidactiek*. Hoe komt het dat leerlingen onbegrepen regels 'blind' toepassen? En waarom vinden onze beste vwo-leerlingen die integraalopgave zo moeilijk? En hoe kunnen we ons wiskundeonderwijs zo verzorgen dat leerlingen minder 'stomme' fouten maken en beter begrijpen wat ze aan het doen zijn?
Om die vragen te bespreken hebben we wat 'theorie' nodig. Niet een omgevallen boekenkast, maar enkele centrale, goed onderbouwde en breed toepasbare, invalshoeken. We hebben gekozen voor de wetenschappelijk solide kennis over de werking van het geheugen. En over de manier waarop leerlingen door het onderwijs beter kunnen leren (wiskundige) problemen op te lossen. Net als in hoofdstuk 1 van het handboek beginnen we in deze serie met aan te geven wat we met die twee invalshoeken en de te gebruiken begrippen bedoelen.
In de volgende delen passen we die 'theorie' toe in allerlei wiskundige gebieden.

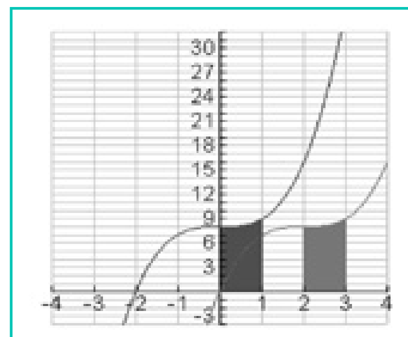
De werking van het geheugen
In de psychologische wetenschappen onderscheiden we het *langetermijngeheugen* (LTG) en het *werkgeheugen* (WG), waarin het eigenlijke werken aan een probleem plaats vindt en dat een beperkte capaciteit heeft. Aan de hand van de figuren 1 en 2 (voor het eerst in *Euclides* verschenen in 1978 – jaargang 53, nummer 9) is vereenvoudigd aan te geven hoe ons geheugen werkt.



figuur 1 Van situatie A naar doel D



figuur 2 Opgeslagen losgeraakte routines



figuur 3 Verschoven grafiek van
$g(x) = x^3 + 8$ met $k = 2$

Figuur 1 visualiseert een leerling die taak A waarneemt en in het WG opneemt. Vervolgens gaat die leerling in het LTG zoeken naar een manier om het doel D te bereiken. Bijvoorbeeld, A is een op te lossen vergelijking en in het LTG wordt het gebied van vergelijkingen geactiveerd en opgenomen in het WG. Het LTG wordt gevisualiseerd door een netwerk van knopen en wegen, dat we het *cognitief schema* noemen. In figuur 1 wordt het cognitief schema van vergelijkingen geactiveerd met de *betekenis* van het concept vergelijking, de leerling beschikt over een *overzicht* van typen vergelijkingen met oplossingsmethoden en kiest voor een passende methode (*Weten dat*) om de gegeven vergelijking op te lossen. Dat zien we graag.

We zien ook dat de situatie ***van figuur 2*** zich voordoet, namelijk dat leerlingen bij een type som een techniek, regel, routine proberen op te slaan: 'je doet dit als dat de som is'. Dat werkt soms wel tot de eerstvolgende toets, want er hoeft niet te worden gekozen, en naar de betekenis – het waarom – wordt zelden gevraagd. Het cognitief schema van leerlingen die zo wiskunde leren, bestaat in de loop van de tijd uit veel van die geïsoleerde koppelingen. Zonder een samenhang in een groter geheel, verbonden door centrale concepten (Wat is een vergelijking?) zijn die op de duur niet meer terug te vinden in het LTG. Betekenisloze terminologie als: 'naar de andere kant brengen', 'wegstrepen', 'vermenigvuldigen van machten is optellen van de exponenten' helpen dan niet om het juiste pad terug te vinden. Oefenen van belangrijke oplossingsmethoden totdat leerlingen die paraat hebben (*Weten dat)* is noodzakelijk, maar zonder een koppeling aan betekenis en overzicht is op die manier oefenen op termijn weinig productief. Na een maand moet het weer!

Probleemoplossen of productie

In de syllabi bij de nieuwe examenprogramma's in wording voor havo/vwo wordt onderscheid gemaakt tussen reproductie (laten zien dat je standaardkennis en standaardprocedures paraat hebt) en productie (je kennis toepassen in niet-standaard situaties). Met probleemoplossen bedoelen we in het handboek dat laatste, de productie, en niet het kunnen oplossen van allerlei boeiende puzzels en probleempjes. Ook al beschikt een leerling over een goed begrip en overzicht van een bepaald gebied van de wiskunde (dus een goed ontwikkeld cognitief schema), dan garandeert dat nog niet dat hij zijn kennis kan toepassen om niet-standaard situaties aan te pakken. Twee voorbeelden uit hoofdstuk 11 over wiskundige denkactiviteiten.

Er ligt net een nieuw wollen tapijt in onze woonkamer en nu laat mijn broer daar een kopje koffie op vallen. De vlek wil er niet meer uit. Na overleg sturen we de driehoekige vorm van het nieuwe stuk tapijt op aan de leverancier en na een week krijgen we een driehoek met dezelfde maten terug. Helaas de driehoek is gespiegeld en past er alleen in als we de onderkant boven leggen.
» Hoe kunnen we met zo weinig mogelijk snijlijnen de stukken passend krijgen?

Een mooi probleempje voor alle leeftijden? Probeer het eerst maar eens!
Zonder een goede probleemaanpak (we noemen dat *Weten hoe*) blijft het *trial and error*. Beter is het zoeken met behulp van *heuristische methoden*.
Kunnen we een eenvoudiger probleem vinden dat we wél kunnen oplossen?
Nog een speciaal geval, waarin we wellicht ons opgelost probleem kunnen gebruiken?
Terug naar ons oorspronkelijk probleem. Helpt dit gezoek? Ja, elke driehoek is te verdelen in twee rechthoekige driehoeken. En als we handig zijn, knippen we alleen langs de beide zwaartelijnen!
In dit probleempje gaat het niet zonder een *systematische probleemaanpak*, maar ook niet zonder het oproepen van meetkundige eigenschappen, een goed *cognitief schema*.
Bij wiskundige deelgebieden als meetkunde, statistiek, kansrekening en modelleren wordt in het *Handboek* veel werk gemaakt van een systematische probleemaanpak, die leerlingen helpt in het goede spoor door te gaan. En dat is te onderwijzen.

En nog even terug naar die integraalopgave.
Is $\int_a^b f(x)dx$ *gelijk aan* $\int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx$ *?*
Waarom wel of niet?

Een leerling die alleen maar heeft geoefend met primitiveren en berekenen van oppervlakten en inhouden, zal niet direct een antwoord vinden. De leerling zal met de *concepten* 'verschoven functie' en 'integraal' moeten redeneren (we noemen dat *Weten waarom*). Het helpt weer om een speciaal geval te onderzoeken (*Weten hoe*); bijvoorbeeld zo iets als de functie f met $f(x) = x^2$ tussen $x = 3$ en $x = 5$ met $k = 2$. Dat voorbeeld is nog geen sluitende argumentatie, maar het verrijkt in het WG wel het 'beeld' van wat er aan de hand is. De stap naar een meer algemene redenering, ondersteund met een plaatje, ligt dan meer binnen bereik.

In hoofdstuk 1 van het *Handboek* over leren en onderwijzen van wiskunde worden de hier kort aangeduide invalshoeken toegelicht en geïllustreerd met veel voorbeelden. De termen die we verder gebruiken in deze serie, zijn:
- werkgeheugen WG, langetermijngeheugen LTG;
- cognitief schema, met betekenissen, concepten en overzicht;
- weten dat, weten hoe, weten waarom;
- systematische probleemaanpak, heuristische methoden.

Literatuur

P. Drijvers, A. van Streun, B. Zwaneveld (2012): *Handboek wiskundedidactiek*. Utrecht: EpsilonUitgaven. Deel 72, ISBN 978-90-5041-130-1

Over de auteurs

Anne van Streun werkte tien jaar als wiskundeleraar en was vervolgens wiskundedidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen. Vanaf 2001 tot zijn pensionering was hij daar hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.
E-mailadres: *avstreun@euronet.nl*
Heiner Wind is voorzitter van de redactie van *Euclides* en was docent wiskunde aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen tot hij op 1 januari 2008 met FPU ging.
E-mailadres: *hwind@home.nl*

Another proof of 'De Opgave 2011'

AN APPLICATION OF A VAN AUBEL GENERALIZATION

[Michael de Villiers, University of KwaZulu-Natal, South Africa]

I found the problem circulated by Dick Klingens at the NVvW annual meeting in November 2011 very interesting, as well as the wide variety of solutions that were produced for this problem as published in the March 2012 issue of *Euclides* [2].
Here is another relatively simple proof to the result that uses the nine-point circle, and then also shows it as a special case of a generalization of Van Aubel's theorem.

Let's first start by recapping two equivalent formulations of the result:

1/ Two circles K_1 and K_2 intersect each other in *B* and *Q*. A line through *Q* cuts K_1 in point *A* and K_2 in point *C*. The points *E* and *F* are the respective midpoints of the arcs *BA* and *BC* that do not contain *Q*.
If *M* is the midpoint of *AC*, then angle *EMF* = 90°.

2/ Given two isosceles triangles *ABC* and *BDE* with respective bases *AB* and *BD* lying in a straight line (and on the same side of the line), and *BC* is perpendicular to *BE*.
If *M* is the midpoint of *AD*, then angle *CME* = 90°.

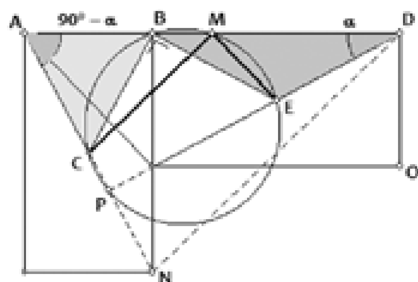


figure 1

Let us first focus on proving the second version as shown ***in figure 1***. Construct similar rectangles *ABN* and *ODB* as shown from the given isosceles triangles *ABC* and *BDE*. Then construct the circumcircle of *BCE* to intersect *AD* in *M* (which we will prove further down, is the midpoint of *AD*). Since angle *CBE* = 90°, it follows that *CME* = 90° (angles on same diameter *CE*). Angle *APD* = 90° from the angle sum in triangle *APD*. Hence, it follows that *P* also lies on the circle *BCE* as the angle *APD* is subtended by the diameter *CE*. Therefore in triangle *AND*, point *P* is the foot of the altitude from *D* to *AN*. Since *NB* is the altitude from *N* to *AD* in the same triangle, and *C* is the midpoint of *AN*, it follows that circle *BCE* is the nine-point circle of triangle *AND*. Thus, the other intersection point *M* of the nine-point circle with side *AD* is the midpoint of *AD*, and completes the proof.

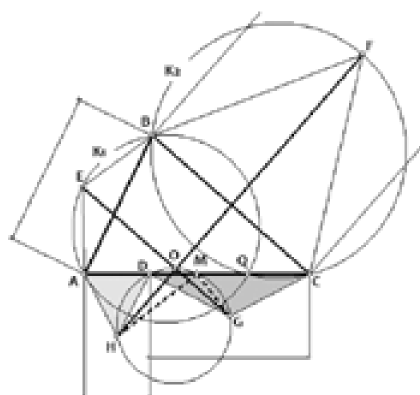


figure 2

Perhaps more interestingly, is that the result is a special case of the following generalization of Van Aubel's theorem proved in [1]: if similar rectangles *E*, *F*, *G* and *H* (centers; Red.) are constructed in alternating order (orientation) on the sides of any quadrilateral *ABCD*, then the lines connecting the centres of the rectangles on the opposite sides of *ABCD* are perpendicular to each other. For example, consider ***figure 2***, which shows sides *CD* and *DA* of the quadrilateral *ABCD* in a straight line. From this Van Aubel generalization, it then follows that *EG* and *FH* are perpendicular in the point *O*, which if *A*, *D* and *C* remains fixed, has as its locus the circle *HDG* (as we saw from the previous result). When *O* therefore coincides with *M* the midpoint of *AC*, we get the desired result and original problem.
Lastly, also note that formulation 1 of the result is now quite nicely illustrated (in the special case when *O* coincides with *M*) in the top part of ***figure 2*** by the circles K_1 and K_2 intersecting in *B* and *Q*, the straight line *AQC*, etc.

References

[1] M. de Villiers (1998): *Dual generalizations of Van Aubel's theorem*. In: *The Mathematical Gazette*, Nov, pp. 405-412.
Available to download from: *http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/aubel2.pdf*

[2] T. Lecluse (2012): *De Opgave 2011*, uitgedeeld op de Jaarvergadering. In: *Euclides* 87(5), maart, pp. 215-217.

Info

The author's website: *http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/*
The author's e-mail address: *profmd1@mweb.co.za*

Een goed begin is...

NAMEN

[Erika Bakker]

In het tweede nummer van deze jaargang gaf Erika Bakker de aftrap voor deze nieuwe rubriek. Ze is dit schooljaar gestart met haar LIO-stage wiskunde als onderdeel van haar Educatieve Master en deelt haar belevenissen met u.

Op de eerste maandag na de zomervakantie werd het schooljaar geopend met een vergadering. Tijdens die vergadering werd ik aan alle andere docenten voorgesteld. Daar sta je dan tussen alle medewerkers. Op dat moment ben je Erika Bakker, onze LIO wiskunde. De hele dag kwamen er docenten naar me toe met een opmerking als: 'Volgens mij heb ik jou nog geen hand gegeven.' Eerlijk gezegd had ik geen idee, want met deze grote hoeveelheid namen en gezichten wist ik echt niet meer aan wie ik me al had voorgesteld en aan wie nog niet. Omdat docenten elkaar op school met de voornaam aanspreken, stelde ik me steeds voor met: 'Erika, LIO wiskunde.'
Op dinsdag ging ik weer naar school. Ik hoefde nog geen les te geven, en kwam weer allemaal docenten tegen die me een hand gaven. Ook nu was ik nog: Erika, LIO wiskunde. Dat veranderde in één keer, toen ik even bij een van 'mijn' brugklassen ging kijken. Een meisje kwam naar me toe en zei: 'Ik ben Inge en wie ben jij?' Even wist ik niet wat ik moest zeggen, want 'Erika, LIO wiskunde' was nu echt niet meer op zijn plaats. Mijn rol was ineens veranderd. Ik heb geantwoord met: 'Ik ben mevrouw Bakker, je docent wiskunde.' Dat klonk best wel raar. Toen ik me op woensdag aan mijn klassen voorstelde, was ik er gelukkig een beetje aan gewend.

Nu ik aan mij eigen naam gewend was, kwam het volgende probleem. Ik wilde zo snel mogelijk de namen van mijn leerlingen leren. Bij de eerste les in elke klas, maakte ik braaf een plattegrond. Als er wat minuutjes 'over' waren, oefende ik snel een paar namen. In havo-4 ging dat vrij snel. Van bijna alle leerlingen stond een pasfoto in het leerlingvolgsysteem, dus ik kon ook thuis oefenen. Ook kwam ik er achter dat surveilleren bij een toets de perfecte manier is om snel namen te leren.
In mijn twee brugklassen ging het niet zo snel. Al snel ontdekte ik dat er bepaalde lokalen zijn waar de klassen door ruimtegebrek niet volgens mijn plattegrond konden zitten. Vol goede moed keek ik uit naar de eerste toets. Maar tijdens die toets keken de leerlingen voortdurend om zich heen en hadden allerlei vragen. Ik kwam aan namen leren gewoon niet toe. Gelukkig kwam in de tweede schoolweek de schoolfotograaf en stonden de pasfoto's van de brugklassers super snel in het leerlingvolgsysteem. Een week later kende ik bijna alle voornamen. En dat is in de brugklas ook wel genoeg, want bij het eerste proefwerk kwam ik er achter dat de leerlingen boven hun werk ook alleen hun voornaam opschrijven.
Er zijn een paar leerlingen die wel hun achternaam opschrijven, en dat is maar goed ook. In een van mijn klassen zitten twee meisjes met dezelfde voornaam en ook twee jongens met dezelfde voornaam. Ach, het heeft bij de jongens ook wel voordelen. Je hoeft maar één naam te noemen, en twee jongentjes hebben direct hun aandacht weer bij de wiskundeles.



Nog even terug naar mijn eigen naam. Tijdens een van mijn lessen vroeg een meisje uit de brugklas aan mij waarom ik met de afkorting 'LWI' in haar rooster stond. Ik vertelde dat ik als LIO – Leraar in opleiding, WIskunde – op school werkte. Vandaar de afkorting. Toen ik vertelde dat mijn nieuwe afkorting EBAK was, vroeg een ander meisje: 'Waar komt de 'E' dan vandaan?' Ik vertelde dat ik Erika heet. Dat vond de klas leuk om te horen en een leerling vertelde direct dat ze een andere leraar bij zijn voornaam moesten noemen. Eigenlijk vonden ze dat maar vervelend. Ben je net gewend aan je nieuwe school, waar je iedereen mevrouw en meneer noemt, is er weer een uitzondering. Ik zei dat ik het ook wel prettig vond als ze mevrouw tegen mij zeggen. Samen besloten we dat het voor iedereen wel zo gemakkelijk is als ik dit jaar 'mevrouw Bakker' blijf.

Over de auteur
Erika Bakker studeert aan de Rijksuniversiteit Groningen. In 2010 rondde ze haar Bachelor Wiskunde af. Nu doorloopt ze in het kader van haar Educatieve Master een LIO-traject.
E-mailadres: *h.b.bakker.1@student.rug.nl*

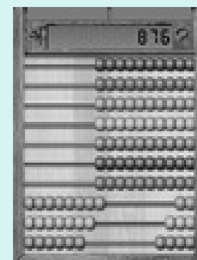
MEDEDELING / KRUISGETALPUZZEL

Euclides Special 2012
Dat de oplossing van de Kruisgetalpuzzel (op de pagina's 86 en 87 in 'Getallen') een behoorlijke kluif is, was van tevoren wel voorzien.
Ondanks het verschuiven van de inzendtermijn tot na de zomervakantie zijn er slechts twee foutloze oplossingen binnengekomen.
Complimenten, vergezeld van de beloofde boekenbonnen, gaan naar Lieke de Rooij en Gerhard Riphagen.
Beide collega's zijn klaarblijkelijk uit het goede puzzelhout gesneden; het is niet de eerste keer dat ze in de prijzen zijn gevallen.
Gefeliciteerd.

Wiskunde digitaal

LOBSTER DIVER

[Lonneke Boels]



Geschikt voor iPad 2 en iPad 3



Duiken naar kreeften

Het doel van het spel is het juist plaatsen van getallen op de getallenlijn. Het spel begint zeer eenvoudig met het plaatsen van bijvoorbeeld het getal 2 tussen 0 en 10. Dit is vooral bedoeld om bekend te raken met het spel.

Een duiker in een bootje sleep je eerst naar de juiste plek. Daarna raak je de onderkant van het scherm aan waardoor de duiker naar de juiste plek duikt. Je hebt drie levens en je moet vier kreeften verzamelen voordat de tijd op is. Eenmaal beneden wordt er automatisch een kreeftenkooi geplaatst. Tik erop om hem te openen en duiker komt met een kreeft naar boven terug. Het geplaatste getal blijft staan waardoor het spel steeds makkelijker wordt. Maar pas op voor de sidderaal! Als je die aanraakt, kost je dat een leven!

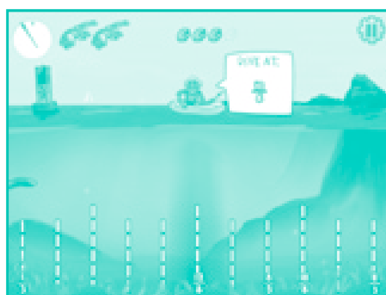
Maak je een fout, dan duik je schoenen op in plaats van een kreeft… Als je foutloos de ronde doorkomt, krijg je een 'perfect' bonus. De eerste ronde doorkomen met maar 1 fout en vier kreeften levert 950 dollar op. Als je onder water bent terwijl de tijd op is, kost je dat ook een leven en heb je dus minder bonuspunten voor de levens.

Niveau twee is direct geschikt voor de eerste klas vmbo en havo. We moeten nu getallen plaatsen op een getallenlijn tussen -5 en 5. De 0 is nu niet meer zichtbaar.

Tussendoor volgen 'sushi rondes'. Een opdracht luidt bijvoorbeeld om een sidderaal door de helft te snijden. Afhankelijk van hoe dichtbij je het precieze midden komt, krijg je ook weer bonusdollars.

Niveau drie heeft een getallenlijn van 0 tot 5 met daartussen 19 streepjes die niet allemaal even lang zijn. De opdracht luidt dan bijvoorbeeld om naar 4 te duiken of naar $2\frac{1}{2}$. Daarna volgt niveau vier van $\frac{2}{4}$ tot 3. Verder dan zes kreeften per keer kom ik de eerste keer niet. Na een sushi ronde met derden volgt ook een getallenlijn met derden.

Vanaf niveau vier is het ook geschikt voor het vwo. Op een gegeven moment wordt het echt pittig. De getallenlijn loopt nu van $\frac{1}{3}$ tot $\frac{11}{3}$ en ik moet bijvoorbeeld $\frac{10}{6}$ plaatsen; ***zie figuur 1***. De helen zijn nog te herkennen aan de langere stokjes. Daartussen zit twee streepjes – geen zesden dus maar derden.



figuur 1

Pluspunten

- Het spel begint zo eenvoudig dat iedereen het eerste level kan halen.
- Het spel is daardoor in het begin geschikt voor het vmbo.
- Het spel nodigt uit om verder te gaan.
- Het spel wordt vanaf niveau vier flink pittig door de toevoeging van breuken (in breuknotatie) aan de getallenlijn.
- De sidderaal zorgt voor tempo en uitdaging in het spel.
- De hogere levels maken het spel geschikt voor het vwo.
- Er is een high score bord. Leerlingen vinden dat leuk.
- Voor wie het spel in het begin te makkelijk is, kun je als uitdaging geven om de hele getallenlijn vol te krijgen binnen de tijd (is erg lastig). Wie dat lukt, krijgt een andere kleur kreeft op het eind.
- Levens die je kwijtraakt, maken het volgende niveau lastiger omdat je dan minder levens hebt waar je mee begint.

Minpunten

- Het is niet mogelijk om op een bepaald niveau te starten.
- De voertaal is Engels maar dat is niet heel storend (alleen de uitleg en enkele woorden zijn in het Engels).
- Steeds als je het spel opnieuw start, begin je opnieuw.

Eindoordeel: aanschaffen

Kostprijs: gratis

Meer informatie over het spel:

- *www.learninggames.org*
- *www.mathsnack.org*
- New Mexico State University / University of Maine: *www.umaine.edu/4h/youth/fun-stuff/*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, docent vakdidactiek rekenen op de Haagse Hogeschool en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.

E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

De tussendoelen havo/vwo-3

DATABANK MET VOORBEELDOPGAVEN

[Dédé de Haan en Lambrecht Spijkerboer]

Inleiding

Zoals bekend is in het najaar van 2004 vanuit het voorzittersoverleg wiskunde de Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO) ingesteld. De minister van OCW heeft deze commissie de status van vernieuwingscommissie wiskunde verleend, en heeft cTWO de opdracht gegeven de examenprogramma's te herzien, maar ook te adviseren over didactische ontwikkelingen en doorlopende leerlijnen wiskunde. Uit dat laatste kwam de tweeledige opdracht voort die in juni 2010 als volgt werd geformuleerd:

1. Beschrijving van te verwerven kennis en vaardigheden aan het eind van klas 3 havo en vwo, de zogeheten tussendoelen, mede in relatie tot de referentieniveaus van de commissie Meijerink.
2. Voorbeeldopgaven bij de tussendoelen.

Het project wordt 'Versterking Wiskunde Onderbouw havo-vwo' genoemd; in het kort het cTWO-Onderbouw project.
In dit artikel schetsen we de achtergronden en de uitvoering van het project en geven we twee voorbeelden van opgaven bij de tussendoelen. In een volgend artikel zullen we dieper ingaan op voorbeelden van opgaven en de ervaringen ermee in de klas.

Achtergrond van dit project

Waarom een beschrijving van de tussendoelen voor het eind van klas 3?
De kerndoelen voor de wiskunde (19 t/m 27; zie noot [1]) zijn globaal geformuleerd en geven de docent weinig houvast met betrekking tot wat leerlingen moeten kennen en kunnen aan het eind van klas 3. Deze kerndoelen zijn voor havo en vwo al grotendeels gerealiseerd aan het eind van klas 2. De minister heeft meer duidelijkheid willen scheppen over wat leerlingen moeten kennen en kunnen aan het eind van klas 3: de overstap naar de bovenbouw havo/vwo. Daarmee is de entree voor de eindexamenprogramma's vastgelegd. Er is daarom behoefte aan een concrete beschrijving van deze 'tussendoelen'.
Om goed aan te geven wat de tussendoelen nu precies inhouden en om het niveau te bewaken zijn deze tussendoelen geoperationaliseerd in voorbeeldopgaven. Dit geeft docenten concreet zicht op welke kennis en vaardigheden aan het eind van klas 3 havo en 3 vwo verworven dienen te zijn en op welk niveau de leerlingen instromen in klas 4.

Uitvoering van het project

De beschrijving van de tussendoelen

cTWO en SLO (Nationaal Expertisecentrum voor Leerplanontwikkeling) hebben begin 2010 samen de 'tussendoelen wiskunde' voor klas 3 havo/vwo opgesteld waarin wordt omschreven wat leerlingen aan het eind van het derde leerjaar moeten kunnen. Op 8 juni 2010 heeft een veldraadpleging plaatsgevonden, op grond waarvan de tussendoelen bijgesteld zijn.
In oktober 2010 hebben cTWO en SLO gezamenlijk de tussendoelen wiskunde voor 3 havo/vwo opgeleverd. Deze versie van de tussendoelen is het document waarop de constructiegroep die verantwoordelijk is voor de voorbeeldopgaven haar werk heeft gebaseerd.
Sinds voorjaar 2011 is een constructiegroep van vijf docenten havo/vwo aan het werk om voorbeeldopgaven te maken bij de tussendoelen en deze uit te proberen in de 3e klas.
De docenten geven allen les in havo en/of vwo klas 3 en/of klas 4. Zoals al eerder genoemd vormen de tussendoelen en de toelichting daarop zoals die er in voorjaar 2011 lagen, het document waarop zij hun opgaven baseren.

Het vervolg van de concept tussendoelen na 2010

In het concept tussendoelendocument dat cTWO en SLO in oktober 2010 hebben afgegeven zijn de doelen geformuleerd voor het eindniveau van klas 3, met uitsplitsing naar havo-vwo en met aanduiding van wat voorkennis is voor respectievelijk wiskunde A, B, C en D. Hierbij is uitdrukkelijk gebruikt gemaakt van wettelijke kaders: kerndoelen van de onderbouw (19 t/m 27) en de domeinen van het referentiekader van Meijerink (Getallen, Verhoudingen, Meten en meetkunde en Verbanden).
In juni 2011 is het Actieplan Beter Presteren behandeld door de Tweede Kamer. Het algemene doel van het Actieplan Beter Presteren is versterking van de kwaliteit van het voortgezet onderwijs en bevordering van hogere prestaties. In het kader hiervan heeft het ministerie van OCW opdracht gegeven aan SLO om de tussendoelen voor de kernvakken Nederlands, Engels en rekenen/wiskunde te ontwikkelen en te valideren. Omdat de concept tussendoelen voor wiskunde havo/vwo-3 inmiddels ontwikkeld waren, kon SLO direct overgaan tot validering. De validering van de concept tussendoelen heeft plaats gevonden in het najaar van 2011. Na verschillende raadplegingen zijn de tussendoelen aangepast en in april 2012 opgeleverd.[2] Tot de tussendoelen wettelijk vastgesteld worden zijn dit dus nog steeds concept tussendoelen!
In het Actieplan Beter Presteren spreekt het ministerie over het gebruik van de tussendoelen als basis voor het diagnostisch tussentijds toetsen van leerlingen aan het einde van de onderbouw (vanaf schooljaar 2014-2015). Deze toets biedt de school, docent, ouders en leerling inhoudelijke informatie over waar de leerling staat op weg naar het eindexamen. Aan de hand daarvan kan maatwerk, in remediërende of verrijkende zin, aan de leerling geboden worden. Naar verwachting zal de diagnostische tussentijdse toets vijf niveaus kennen: vmbo-BB, vmbo-KB, vmbo-GL/TL, havo en vwo.
De diagnostische tussentijdse toets (DTT) zal ontwikkeld worden door het Cito onder verantwoordelijkheid van het College voor Examens. De projectgroep van het Cito die zich hiermee bezighoudt heeft een eerste inkijkje gegeven in de DTT tijdens een werkgroep op de studiedag van de NVvW op 3 november jl.
Op 26 maart 2012 is een concept-wetsvoorstel opgeleverd over de diagnostische tussentijdse toets. De tekst van het conceptwetsvoorstel en de internetconsultatie over de invoering ervan zijn via [3] te vinden.

Het wetsvoorstel zal vervolgens nog langs de Tweede en de Eerste Kamer moeten. Dit betekent dat de tussendoelen op zijn vroegst per augustus 2013 wettelijk vastgesteld worden. Dit is bijzonder lastig voor het onderwijsveld, omdat de tussendoelen wel al in schooljaar 2014-2015 tussentijds getoetst moeten worden! Educatieve uitgeverijen kunnen niet tot augustus 2013 wachten met het aanpassen van de methodes, dus zij zullen de methodes al gaan aanpassen op basis van de concept-tussendoelen [4] – in de hoop dat er niet zoveel gaat veranderen. Dit betekent dat de docenten zelf ook goed de stand van zaken rond de tussendoelen in de gaten moeten houden!

Nauwelijks veranderingen

De concept-tussendoelen die de SLO in april 2012 heeft opgeleverd, zijn nauwelijks veranderd ten opzichte van de concept-tussendoelen die al in oktober 2010 waren opgeleverd. Wel moest de opsplitsing naar havo A, B en vwo A, B en C eruit en veranderd worden in een opsplitsing naar havo en vwo. Voor een volledig overzicht van de verschillen verwijzen we u naar het 'verschildocument' [5].

Databank met opgaven

Zoals eerder in dit artikel genoemd zijn er voorbeeldopgaven geconstrueerd die het eindniveau laten zien voor 3e klas havo/vwo. Deze voorbeeldopgaven baseren zich op de eerste concept-tussendoelen uit oktober 2010. De opgaven kunnen nu goed gebruikt worden door docenten, toetsontwikkelaars en uitgevers, juist vanwege de minieme veranderingen van april 2012. De voorsprong die is genomen, betekent dat er nu reeds bij de (concept-)tussendoelen voorbeeldopgaven zijn!

Omdat de opgaven in een databank zijn opgenomen, is er ook een eenvoudig zoeksysteem waardoor iedereen die de opgaven wil gebruiken ook met gerichte zoektermen kan zoeken binnen de databank. De opgaven hebben verschillende soorten kenmerken waarop kan worden geselecteerd:

1. Is het voor havo of vwo? (of allebei).
2. Is de opgave als toetsopgave te benutten of geschikter als klassenactiviteit in te zetten? De term 'wiskundige denkactiviteit' is niet gebruikt; hierop kan echter wel gezocht worden.
3. Bij welk (hoofd)domein hoort de opgave? De keuze is hierbij uit: B – Getallen en variabelen; C – Verhoudingen, D – Meten en meetkunde; E – Verbanden en formules; F – Informatieverwerking en onzekerheid. Het domein A – Inzicht en handelen, wordt niet apart benoemd.
4. Bij welke tussendoelnummers hoort de opgave?
5. Welke trefwoorden horen bij de opgave? Hierbij valt te denken aan 'verhoudingen', 'gelijkvormigheid', 'Pythagoras', etc.
6. Welk niveau hoort bij de opgave? Eenvoudig I, op niveau II, pittiger III. De niveaus waaraan hier wordt gerefereerd, zijn de niveaus zoals die ook bij internationale toetsen zoals bij PISA-opgavenconstructie gebruikt worden:
   Niveau I: Reproductie, definities, feiten, standaardprocedures.
   Niveau II: Verbanden leggen, informatie combineren, eigen (wiskundig) gereedschap kiezen.
   Niveau III: Modellen maken/gebruiken, redeneren, generaliseren, inzicht tonen.
7. Bereidt de opgave specifiek voor op wiskunde A of B?

Alle opgaven zijn, in twee revisierondes, onder leiding van de toetsexpert van het project bijgesteld. Vervolgens zijn ze uitgeprobeerd in de klas. Op grond van de ervaringen hiermee worden ze nog een keer gereviseerd, daarna komen ze in de databank. Het streven is alle tussendoelen te 'dekken'. De databank is inmiddels gedeeltelijk gevuld en zal aan het einde van 2012 volledig gevuld zijn met ongeveer 150 opgaven. De databank (zie noot [6]) is toegankelijk voor het hele werkveld wiskunde.

De opgaven

Gestreefd is vooral opgaven te maken die een aanvulling zijn op wat al beschikbaar

is in de methoden. Anderzijds is gepoogd de breedte van het wiskundeonderwijs van de onderbouw in de opgaven terug te laten komen. Dat wil zeggen dat het accent ligt op meer contextrijke opgaven over situaties waarmee ook zichtbaar is hoe wiskunde in de realiteit wordt gebruikt en kan worden benut. Maar niet alleen contextrijke opgaven zijn als voorbeeldopgaven opgenomen, er zitten ook 'kale' opgaven tussen. Daarmee wordt dan op een wellicht meer verrassende wijze omgegaan, anders dan een gewoon rijtje sommen om te oefenen.
Veel van de opgaven zijn bedoeld om te gebruiken in een toets. Bij de meeste van deze opgaven is het niet de bedoeling van de constructeurs dat leerlingen door het doen van deze opgaven iets leren of ontdekken. Wanneer juist dat karakter van ontdekken en puzzelen wel meer voor de hand ligt, is de opgave (ook) aangemerkt als klassenactiviteit.
Het is uitdrukkelijk niet de opdracht van de constructiegroep geweest om opgaven te ontwerpen die ingezet kunnen worden als diagnostische toets!
De opgaven worden in PDF- en in Word-formaat aangeleverd, zodat het mogelijk is een opgave aan te passen, op te knippen, en in meerdere situaties te benutten voor het in beeld brengen van de capaciteiten van leerlingen gericht op hun doorstroom naar de bovenbouw. Ook kunnen sommige toetsopgaven op deze manier zelf aangepast worden tot wiskundige denkactiviteit.
De opmaak van de afbeeldingen bij de opgaven is niet voorzien van geavanceerde opmaakprofielen, zo kan de docent ook in de illustraties vaak nog aanpassingen plegen.
Van alle opgaven zijn de uitwerkingen bijgeleverd.

Voorbeelden van opgaven

Verschillende formules?[7]
Meike heeft een experiment gedaan bij natuurkunde. Zij moest op bepaalde tijdstippen de afgelegde afstand meten. Er bleek een lineair verband te bestaan tussen de tijd en de afstand in haar proef. De meetresultaten staan ***in tabel 1***.

Tijd (s)	2,0	3,5	5,0	6,5	8,0
Afstand (cm)	6	12	18	24	30

tabel 1

De formule $A = 4t - 2$ met A voor de afstand in cm en t voor de tijd in seconden, is een goede formule bij deze tabel.
» Leg uit hoe de getallen 4 en -2 berekend kunnen worden met de gegevens uit de tabel.
Yke heeft een soortgelijk experiment gedaan. Zij moest op bepaalde afstanden de passeertijd meten. Ook Yke heeft een lineair verband gevonden. Haar meetresultaten staan ***in tabel 2***.

Afstand (cm)	1	3	5	7	9
Tijd (s)	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75

tabel 2

De formule $t = 0{,}25A + 0{,}5$ met t voor de tijd in seconden en A voor de afstand in cm, is een goede formule bij deze tabel.
» Leg uit hoe de getallen 0,25 en 0,5 berekend kunnen worden uit de tabel.
Volgens de docent hebben Meike en Yke beiden dezelfde correcte formule gevonden.
» Controleer voor het meetresultaat van Meike bij $t = 2$ of dit klopt met Yke's formule.
» Controleer voor het meetresultaat van Yke bij $A = 1$ of dit klopt met Meike's formule.
Een ander experiment levert de formule $t = 5A - 3$.
» Herleid deze tot een formule in de vorm $A = p \cdot t + q$.

Cirkels, cirkels en nog meer cirkels[8]
Kies zelf in welk volgorde je opdrachten maakt. Sommige opgaven zijn moeilijker dan andere. Probeer zo veel mogelijk opgaven op te lossen; ***zie figuur 1***.



figuur 1

a. Teken twee cirkels met een straal van 3 cm en teken daaromheen een derde cirkel die beide cirkels omvat. Kies de cirkels zó dat de derde cirkel een zo klein mogelijke straal heeft.
b. Teken drie cirkels met een straal van 3 cm en teken daaromheen een vierde cirkel die de eerste drie cirkels omvat. Kies de cirkels zó dat de vierde cirkel een zo klein mogelijke straal heeft.
c. Teken vier cirkels met een straal van 3 cm en teken daaromheen een vijfde cirkel die de eerste vier cirkels omvat. Kies de cirkels zó dat de vijfde cirkel een zo klein mogelijke straal heeft.
d. Hoe groot is de straal van de derde cirkel uit opdracht **a** ?
e. Bereken hoe groot de straal van de vierde cirkel uit opdracht **b** exact is.
f. Bereken hoe groot de straal van de vijfde cirkel uit opdracht **c** exact is.

Noten

[1] *http://ko.slo.nl/kerndoelen/*
[2] *www.slo.nl/voortgezet/onderbouw/nieuws/00046/*
[3] *www.internetconsultatie.nl/tussentijdsetoetsvo*
[4] *www.slo.nl/downloads/documenten/tussendoelen-wiskunde-havo-vwo-onderbouw-vo.pdf/*
[5] *www.fisme.science.uu.nl/ctwo/Onderbouw/*
[6] De databank is te vinden via de website van cTWO: *www.fisme.science.uu.nl/ctwo/Onderbouw/onderwijs/welcome.php*
[7] Toetsopgave havo/vwo, domeinen B: *Getallen en variabelen* en E: *Verbanden en formules,* niveau II. Opmerking: Aanknopingspunt om formulemanipulatie te beginnen.
[8] Klassenactiviteit vwo. Trefwoorden: cirkels, bijzondere driehoeken, wiskundige denkactiviteit, domein D: *Meten en meetkunde,* niveau III. Bereidt specifiek voor op wiskunde B/D. Opmerkingen: – De opgave is erg geschikt om in GeoGebra uit te voeren. – Opgave b en vooral e zijn beduidend moeilijker dan de overige opgaven. Mogelijkheid inbouwen om tips te vragen (zie uitwerkingen). – Er is vrij veel papier nodig. Met kleinere cirkels is er minder papier nodig, maar leerlingen hebben de ruimte nodig voor het overzicht nadat er hulplijnen getekend zijn.

Over de auteurs

Dédé de Haan (e-mailadres: *d.dehaan@uu.nl*) is werkzaam bij het Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (FISME, Universiteit Utrecht) en is projectleider van het cTWO Onderbouw project. Lambrecht Spijkerboer (e-mailadres: *l.spijkerboer@aps.nl*) is werkzaam bij het APS en is toetsexpert van het cTWO Onderbouw project.

Reken- en wiskunde-vaardigheden

VOOR BEGINNEND ONDERNEMERS IN KENIA

[Jos Rikers]

In een samenwerking tussen het Tangaza College (Nairobi, Kenia) en de Open Universiteit wordt sinds 2010 gewerkt aan het vernieuwen van het curriculum van het instituut voor sociale wetenschappen aan deze Afrikaanse instelling voor hoger onderwijs.
Het bijzondere van de opleiding is dat ze is gericht op het opleiden van jonge academici die in staat zijn om de ontwikkeling van het land in eigen hand te nemen. De afgestudeerden gaan naar de gemeenschappen in de steden (met name de sloppenwijken) en op het platteland en organiseren de lokale bewoners zodanig dat gezamenlijk actief wordt gewerkt aan een ontwikkelplan en aan ontwikkelprojecten.
Een belangrijke rol in deze activiteiten speelt het scheppen van banen en werkgelegenheid, zodat mensen op eigen kracht een bestaan kunnen opbouwen. De projecten die hiertoe worden opgezet, veranderen de laatste jaren van karakter. Werd tot voor enkele jaren geleden vooral met geld van (buitenlandse) hulporganisaties gekeken naar werkverschaffing, tegenwoordig wordt ook gekeken naar de economische levensvatbaarheid van economische activiteiten. Het voordeel van deze aanpak is dat de activiteiten meer overlevingskansen hebben op de langere termijn, dus ook als de subsidie op is.
Om het werk op deze manier te kunnen invullen hebben de alumni van de al genoemde opleiding steeds meer behoefte aan vaardigheden op het gebied van ondernemerschap. Het ontwikkelen van economisch gezonde bedrijfsconcepten wordt steeds belangrijker. Een van de eisen voor vernieuwing van het curriculum is dan ook meer aandacht voor het aanleren van ondernemersvaardigheden.
In het samenwerkingsproject tussen Tangaza College en Open Universiteit wordt onder andere een cursus ondernemersvaardigheden ontwikkeld. De rode draad door deze cursus is het ontwikkelen van een bedrijfsplan. Bij de ontwikkeling van de cursus wordt vooral ingezet op het met videomateriaal invullen van de leerervaring. Hiermee wordt bereikt dat de studenten zelf de vaardigheden gaan beheersen, maar vooral ook dat ze instrumenten krijgen aangereikt om die vaardigheden met behulp van training aan anderen over te brengen. Hiertoe wordt uitgegaan van een speciaal voor deze benadering bij de Open Universiteit ontwikkelde leeromgeving. De in 2011 ontwikkelde materialen (voornamelijk video) worden vrij beschikbaar gesteld als zogeheten *Open Educational Resources* (OER) en zijn daarom terug te vinden op YouTube. Voor dit project is een apart kanaal ingericht (OERentrepreneurship): *www.youtube.com/user/OERentrepreneurship*



foto 1 Henk van den Brink (Open Universiteit) en Louisa Manwari (Tangaza College) op locatie in Kenia in juli 2011

Rekenen en wiskunde

Tijdens de ontwikkeling van deze cursus ontdekte het cursusteam dat veel studenten (maar ook alumni) problemen hebben met rekenkundige en wiskundige basisvaardigheden. Bij het opzetten van een bedrijfsplan spelen concepten als investering, rente op lening, bedrijfskosten, opstartkosten e.d. een rol en moet een opsteller (lees: een ondernemer in de dop) met deze begrippen kunnen werken en met name de bijbehorende berekeningen kunnen uitvoeren.
Om speciaal aandacht te kunnen geven aan deze vaardigheden is in het project bedacht dat er korte videofilms moeten komen waarin de rekenvaardigheden e.d. worden gepresenteerd in de context van het bedrijfsplan. Gekozen is om één voorbeeld te gebruiken en in een serie filmpjes uit te werken.
Dankzij een subsidie van het **Wereldwiskunde Fonds** zijn de filmpjes gerealiseerd. In februari 2012 is Judith Pete, die docente is (en econome) bij het Tangaza College, naar Nederland gekomen en is een serie filmpjes in 4 dagen tijd ontwikkeld en opgenomen. Bij de uitwerking van de scripts en het maken van de opnamen bleek al snel hoe belangrijk het was dat we konden samenwerken met iemand die van de lokale situatie op de hoogte is en ook bekend is met de studenten voorwie het materiaal bedoeld is. Met behulp van Judith Pete zijn de films dan ook toegespitst op de situatie van beginnend ondernemers die in de informele economie proberen een bedrijf op te zetten.



foto 2 MAZAO Agro-Business (Kiserian, Kenia) – het project team en externe bezoekers uit Zuid-Korea in juni 2011



foto 4 Het videoteam in de opnamestudio in Heerlen in maart 2012



foto 3 Judith Pete (Tangaza College) en Henk van den Brink (OU) in de opnamestudio in Heerlen in maart 2012

Maar ook de culturele inbedding van de productie is bijzonder geslaagd, waardoor de waarde van het materiaal alleen maar is toegenomen. De filmpjes die zijn gemaakt, draaien allemaal om de groentekraam die een jonge vrouw op de markt wil gaan beginnen. Eerst wordt ingegaan op de financiële kant van het starten van een groentekraam. Later wordt overgegaan op de relatie tussen inkomen en levensbehoeften. Steeds worden deze inhoudelijke zaken herleid naar de bijbehorende berekeningen. Inmiddels is men bij het Tangaza College zo enthousiast over het resultaat van deze productie dat al wordt nagedacht over nieuwe mogelijkheden.
Na de opnamen in februari 2012 is het materiaal bewerkt door het enthousiaste productie team van de Open Universiteit en zijn de resultaten ook weer als OER gepubliceerd op het YouTube kanaal van het project. Inmiddels zijn 12 video's gepubliceerd en kan iedereen die denkt de filmpjes te kunnen gebruiken, ze inzetten.

Over de auteur
Jos Rikers is beleidsmedewerker internationale samenwerking en duurzame ontwikkeling aan de Open Universiteit.
E-mailadres: *jos.rikers@ou.nl*

AANKONDIGING/ Onderbouw Wiskunde Dag

Na een succesvolle pilot in februari 2012 organiseert het Freudenthal Instituut (FIsme) de 2e OnderbouwWiskundeDag die op **woensdag 6 februari 2013** zal plaatsvinden.
De OnderbouwWiskundeDag is een wiskundewedstrijd voor teams van 3 à 4 leerlingen uit leerjaar 3 havo/vwo.
De OnderbouwWiskundeDag is vergelijkbaar met de Wiskunde A-lympiade en de Wiskunde B-dag voor de bovenbouw. De leerlingen werken gedurende de dag (ca. 9:00-14:00 u) aan een 'grote' wiskundige (denk)opdracht waarin probleemoplossen centraal staat. Dit resulteert in een eindproduct (werkstuk). Inhoudelijk sluit deze opdracht (voor zover mogelijk) aan bij de nieuwe doelen voor de onderbouw en de denkactiviteiten van cTWO.

Deelname kost € 50,00 per school. Hiervoor ontvangt u de opdracht, een handreiking en na afloop de uitslag. U kunt tevens met maximaal twee docenten per school deelnemen aan de netwerkbijeenkomst op vrijdagmiddag 25 januari 2013.

Meer informatie en het inschrijfformulier vindt u op: *www.fisme.science.uu.nl/nl/onderbouwwiskundedag*

Vanuit de oude doos

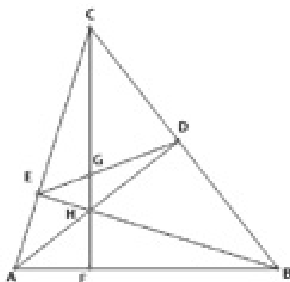
$A^{\underline{o}}$ 1929

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.
Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer twee redelijk pittige opgaven uit 1929. Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.
Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

figuur 1



Opgave 1

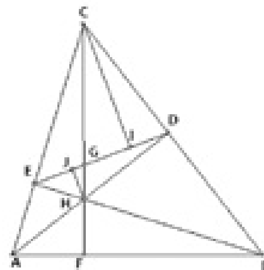
In een scherphoekige driehoek *ABC* trekt men de hoogtelijnen *AD, BE* en *CF*, met hoogtepunt *H*. De lijn *ED* snijdt de hoogtelijn *CF* in het punt *G*.
Bewijs dat *CG* : *GH* = *CF* : *HF*.

Een situatieschets staat ***in figuur 1***. Lukt het u verder?
Enkele handvatten:
- vierhoek *ABDE* is een koordenvierhoek (*omgekeerde stelling van Thales*);
- de driehoeken *CDE* en *CAB* zijn gelijkvormig (*ED is antiparallel met AB*);
- verhoudingen zijn vaak het gevolg van gelijkvormigheid.

Opgave 2

Van driehoek *ABC* is gegeven $\angle A$ in ligging en grootte $(= bg\ tg\ \frac{4}{3})$ benevens het oppervlak = 10 cm². Bepaal de m.p. van het hoogtepunt. Welke zijn de symmetrieassen van de m.p.?
Opmerking – Gegeven is dus dat $\tan(\angle A) = \frac{4}{3}$. En m.p. staat voor 'meetkundige plaats'.

figuur 2



Uitwerking 1

Een mogelijke aanpak is het antwoord op de vraag: Welke driehoeken zijn gelijkvormig?
Mijn oplossing – De driehoeken *CDE* en *CAB* zijn gelijkvormig.
Stel de verhoudingsfactor is $x = \frac{ED}{AB}$.

Omdat $\angle EDC = \angle A$ en $\angle CDA = 90°$, is: $\angle EDA = 90° - \angle A$.
Ook is: $\angle ABE = 90° - \angle A$.
Dus zijn de driehoeken *EDH* en *ABH* gelijkvormig, met dezelfde verhoudingsfactor $x = \frac{ED}{AB}$.
Deze verhoudingsfactor is ook van toepassing op overeenkomstige hoogtelijnen in deze driehoeken. Vandaar dat we de tekening uitbreiden met hoogtelijnen op *DE* in de driehoeken *CDE* en *EDH*; ***zie figuur 2***.

Ook geldt dus $\frac{HJ}{HF} = x$ en $\frac{CI}{CF} = x$,

waaruit volgt $\frac{HJ}{HF} = \frac{CI}{CF}$.
Dus ook:
(1)… $\frac{HJ}{CI} = \frac{HF}{CF}$
En ook zijn de driehoeken *HJG* en *CIG* gelijkvormig (*overstaande hoeken* en een *rechte hoek*), waaruit volgt:
(2)… $\frac{HJ}{CI} = \frac{HG}{CG}$
Uit (1) en (2) volgt hetgeen bewezen moest worden.

De tekening bevat nog een aantal aardige eigenschappen. Geocadabra verklapt onder andere:
- *DI = EJ*

En ook hiermee kunt u zich prima amuseren!

Uitwerking 2

Een situatieschets waarin de baan van het hoogtepunt *H* alvast is getekend, staat ***in figuur 3***.
In die figuur is een assenstelsel aangebracht met *A* als oorsprong (maar *D* kan ook prima).
Het is al een uitdaging op zich dit model dynamisch te ontwerpen op de computer!

Stellen we *AD* = 3*c*, dan is *CD* = 4*c*. De oppervlakte van driehoek *ABC* is 10, dus is: $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot 4c = 10$, waaruit volgt: $AB = \frac{5}{c}$.
De tot nu toe bekende coördinaten zijn dan:
$A(0,0),\ B(\frac{5}{c},0),\ C(3c,4c),\ D(3c,0)$
De lijn *AC* heeft helling $\frac{4}{3}$; dus heeft de lijn *BE* helling $-\frac{3}{4}$. Een vergelijking van

BE is dan $y = -\frac{3}{4}(x - \frac{5}{c})$. Snijden met *CD* geeft (voor het punt *H*):

$$\begin{cases} x_H = 3c \\ y_H = \dfrac{15-9c^2}{4c} \end{cases}$$

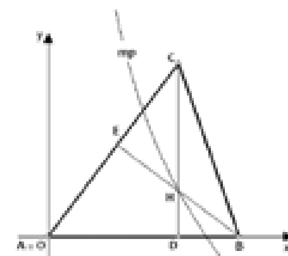
Eliminatie van *c* hieruit geeft:

$$y = \frac{45-3x^2}{4x} = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{4x}$$

(of $3x^2 + 4xy = 45$); dit is een vergelijking van een hyperbool.
In figuur 3 wordt de rechtertak van deze hyperbool doorlopen. Wanneer de tekening in de horizontale as en vervolgens in de verticale as wordt gespiegeld, verschijnt de tweede hyperbooltak.
Nu de symmetrieassen. Denkt u eerst even na? ≡ *denk, denk, …* ≡

De symmetrieassen zijn de bissectrices van de asymptoten waarvan de vergelijkingen

figuur 3



$x = 0$ en $y = -\frac{3}{4}x$ zijn. Gebruik nu de formule voor hoekdeellijnen van twee gegeven lijnen: $\frac{|3x+4y|}{\sqrt{(3^2+4^2)}} = \frac{|x|}{1}$
waaruit volgt dat $y = \frac{1}{2}x$ en $y = -2x$ de symmetrieassen zijn.

Bron
Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatings-examens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maat-schappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur
Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

VERSCHENEN / De zeven grootste raadsels van de wiskunde



Ondertitel: Los ze op en word miljonair!
Auteurs: Alex van den Brandhof, Roland van der Veen, Jan van de Craats, Barry Koren
Uitgever: Prometheus | Bert Bakker, Amsterdam (2012)
ISBN: 978 90 351 3801 8
Prijs: € 19,95 (208 pagina's; paperback)

Van de achterflap
Op 24 mei 2000 presenteerde het Amerikaanse Clay Mathematics Institute tijdens een plechtige bijeenkomst in het Collège de France in Parijs een lijst met de zeven grootste onderzoeksvragen van de moderne wiskunde: de millenniumproblemen. Voor de oplossingen reserveerde het instituut een bedrag van zeven miljoen dollar: een miljoen voor eenieder die als eerste een millenniumprobleem weet op te lossen.
In 2003 was het raak: de Rus Grigori Perelman wist het zogeheten Poincaré-vermoeden te bewijzen, een van de grootste doorbraken in de wiskunde ooit. Het duurde echter nog tot 2010 voor het prijzengeld officieel aan Perelman werd toegekend: het kostte experts jaren voor zij het bewijs van Perelman volledig hadden gecontroleerd. Perelman bleek echter niet geïnteresseerd te zijn in het geld. 'Ik heb alles wat ik hebben wil', zo verklaarde hij.
De overige zes millenniumproblemen wachten nog altijd op een oplossing.
De zeven grootste raadsels van de wiskunde geeft de lezer op een toegankelijke manier een kijkje in de complexe, maar zeer fascinerende wereld van het hedendaagse wiskundeonderzoek.

Alex van den Brandhof, Roland van der Veen, Jan van de Craats en Barry Koren zijn wiskundigen die gezamenlijk het brede spectrum van wetenschappelijk onderzoek, wetenschapspopularisering en wetenschaps-journalistiek bedienen.

In de Volkskrant
(Martijn van Calmthout, 12 september 2012) Om maar met de deur in huis te vallen: *De zeven grootste raadsels van de wiskunde* is geen boek voor watjes.
(…) Zoals een toeschouwer bij schaak de spelregels zal moeten leren, vergt genieten van topwiskunde dat de toeschouwer iets van het spel begrijpt. Wat dat betreft is *De zeven grootste raadsels van de wiskunde* prettig recht door zee: wiskunde genieten zonder je erin onder te dompelen kan niet, is het uitgangspunt.
En dus staat het boek vol afleidingen en overwegingen die al bepaald niet simpel zijn, ook al zijn ze nog niets vergeleken bij de Echte Problemen. Een boek waarvoor je moet gaan zitten dus en echt je hersens gebruiken. Wie dat doet, geniet.

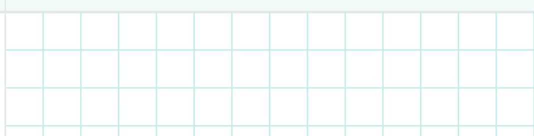
VERSCHENEN / Wetenschappen in Beeld



Tekst en tekeningen: Margreet de Heer
Kleur: Yiri T. Kohl
Uitgever: Meinema, Zoetermeer (2012)
ISBN: 978 90 2114 428 3
Prijs: €19,50 (189 pagina's; paperback)

Van de achterflap
Wat is Weten? En wat is Wetenschap?
In een zoektocht die begint bij de Oude Grieken traceren Margreet de Heer en haar man Yiri het ontstaan van de verschil-lende wetenschappelijke disciplines. Van de wiskunde van Pythagoras, via de middel-eeuwse alchemie naar de Wetenschappelijke Revolutie van de zeventiende eeuw, om ten slotte te belanden bij de twintigste-eeuwse quantumtheorie en hoe die de huidige wetenschap vorm geeft.
Onderweg komen zij vele bekende en minder bekende wetenschappers tegen: Archimedes die 'Eureka!' riep, Galileo die ruzie kreeg met de kerk, Newton die een appel zag vallen, Darwin die op wereldreis ging – maar ook de vrouw van Antoine Lavoisier die haar man misschien wel overschaduwde…
Wetenschappen in Beeld is een kleurrijk en leerzaam boek, dat feiten afwisselt met vragen, geschiedenis met experiment en objectieve informatie met humor.

Info
Zie ook:
www.margreetdeheer.com/nieuws/wetenschap.html



Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade 2012



Op 14 september 2012 vond de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats op de TU Eindhoven. Zie de opgaven op deze pagina. Nadat u zelf gepuzzeld heeft, kunt u de uitwerkingen terugvinden op « *www.wiskundeolympiade.nl* »
Deze finale was de laatste van drie wedstrijdronden: in januari bogen 5612 leerlingen van 270 scholen zich over de opgaven. Hiervan werden 811 leerlingen uitgenodigd voor de tweede ronde die op 23 maart j.l. op diverse Nederlandse universiteiten werd gehouden.
Aan de finale hebben 143 leerlingen meegedaan. De prijsuitreiking vond plaats op 9 november op de TU Eindhoven.

Hieronder staat in drie tabellen een overzicht van de 15 prijswinnaars, verdeeld over drie categorieën. Naast deze leerlingen zijn nog 16 andere veelbelovende finalisten uitgenodigd voor de nationale selectie.
Na een intensief trainingsprogramma worden 6 leerlingen geselecteerd die Nederland zullen vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) in Colombia in juli 2013. Daarnaast worden er 4 meisjes geselecteerd voor de European Girls' Mathematical Olympiad 2013 in Luxemburg en 10 leerlingen voor de Benelux Mathematical Olympiad 2013 in Nederland.

2013
Een nieuwe editie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gaat in januari 2013 van start met de eerste ronde. Dit jaar kunt u op school zelf een geschikte datum prikken om de wedstrijd te houden, in de periode van 21 t/m 31 januari 2013.
Geef uw school op via « *wedstrijd.wiskundeolympiade.nl* ».

Categorie klas 6

nr	aantal punten finale	2e	1e	€	naam woonplaats	school in
1	50	40	34	250	**Matthijs Lip** Hardinxveld-Giessendam	Gymnasium Camphusianum Gorinchem
2	49	40	36	150	**Mathijs Pater** Vianen	St. Bonifatiuscollege Utrecht
3	49	39	36	100	**Jeroen Huijben** Goirle	Theresia Lyceum Tilburg
4	49	36	31	75	**Lars Ran** Hengelo	Montessori College Hengelo
5	49	36	30	50	**Djurre Tijsma** Leeuwarden	Chr. Gymnasium Beyers Naudé Leeuwarden

Categorie klas 5

nr	aantal punten finale	2e	1e	€	naam woonplaats	school in
1	50	40	36	200	**Tysger Boelens** Ter Apel	Regionale Scholengemeenschap Ter Apel
2	50	40	36	200	**Michelle Sweering** Krimpen a/d IJssel	Erasmiaans Gymnasium Rotterdam
3	49	40	31	100	**Jeroen Winkel** Nijmegen	Stedelijk Gymnasium Nijmegen
4	48	40	34	75	**Bas Verseveldt** Tilburg	Theresia Lyceum Tilburg
5	48	39	36	50	**Thijs Douwes** Wijk bij Duurstede	Revius Lyceum Doorn

Categorie klas 4 en lager

nr	aantal punten finale	2e	1e	€	naam woonplaats	school in
1	46	32	29	250	**Bob Zwetsloot** Noordwijkerhout	Teylingen College Noordwijkerhout
2	44	39	36	150	**Pepijn de Maat** [illegible]	Christelijk Gymnasium Utrecht
3	40	24	22	100	**Peter van der Plas** Woensdrecht	RK Gymnasium Juvenaat Heilig Hart Bergen op Zoom
4	38	32	34	75	**Joris Gerlagh** Tilburg	Theresia Lyceum Tilburg
5	34	28	36	50	**Maaike Los** Sauwerd	Gomaruscollege Groningen

1. Gegeven zijn vier verschillende gehele getallen a, b, c en d.
Bewijs dat $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ deelbaar is door 12.

2. We nummeren de kolommen van een $n \times n$-bord van 1 tot en met n. In elk vakje van het bord zetten we een getal, op zo'n manier dat in elke rij precies de getallen 1 tot en met n staan (de volgorde kan in elke rij anders zijn) en in elke kolom ook precies de getallen 1 tot en met n staan. We kleuren vervolgens een vakje blauw als het getal in dat vakje groter is dan het nummer van de kolom waar het vakje in zit. In de figuur zie je een voorbeeld voor $n = 3$.

1	2	3
3	1	2
1	2	3
2	3	1

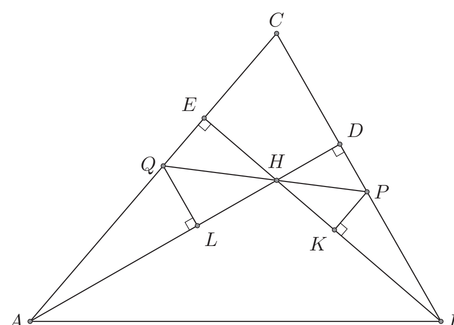
(a) Stel dat $n = 5$. Kunnen we de getallen zo neerzetten dat in elke rij precies evenveel vakjes blauw gekleurd worden?

(b) Stel dat $n = 10$. Kunnen we de getallen zo neerzetten dat in elke rij precies evenveel vakjes blauw gekleurd worden?

3. Bepaal alle paren (p, m) bestaande uit een priemgetal p en een positief geheel getal m waarvoor geldt dat

$$p^3 + m(p+2) = m^2 + p + 1.$$

4. Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC met punten D op BC en E op AC zodanig dat AD loodrecht staat op BC en BE loodrecht staat op AC. Het snijpunt van AD en BE heet H. Een lijn door H snijdt lijnstuk BC in P en snijdt lijnstuk AC in Q. Verder is K een punt op BE zodanig dat PK loodrecht staat op BE en is L een punt op AD zodanig dat QL loodrecht staat op AD.



Bewijs dat DK evenwijdig is aan EL.

5. De getallen 1 tot en met 12 worden in een rijtje achter elkaar gezet. Het aantal manieren waarop dit kan is $12 \times 11 \times 10 \times \cdots \times 1$. We eisen dat er in zo'n rijtje precies één getal staat dat kleiner is dan het getal dat er direct aan voorafgaat.
Hoeveel van de $12 \times 11 \times 10 \times \cdots \times 1$ rijtjes voldoen aan deze eis?

BOEKBESPREKING /

De Ster van de dag gaat op en onder

ZEBRA 34

[Ernst Lambeck]



Ondertitel: Rekenen aan zonsopkomst en zonsondergang
Auteur: Aad Goddijn
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2012)
ISBN: 978-905041-129-5
Prijs: € 10,00 (in de boekhandel), 64 pagina's (paperback)
Voor NVvW-leden geldt op bijeenkomsten een gereduceerde prijs.

Begin augustus hebben politieagenten in Middelburg een uitgebreid onderzoek ingesteld naar een verdacht blikje dat op een verkeersbord was bevestigd. Na het nodige speurwerk (met onder meer overleg van explosievenverkenners van Politie Zeeland met de explosievenopruimingsdienst van Defensie) bleek het niet te gaan om een gevreesde bom, maar wel om een speciale camera gebruikt door de sterrenwacht: 'Het is gewoon een blikje met een gaatje en een stukje fotopapier om de baan van de zon vast te leggen.'
Als dit incident niet heeft geleid tot het verwijderen van de camera's, dan kan het elke dag fotograferen van de zon op één vaste tijd en in één vaste richting leidden tot een mooi resultaat: de analemma van de zon. Het laatste deel van het hier te bespreken boekje gaat over dit verschijnsel.

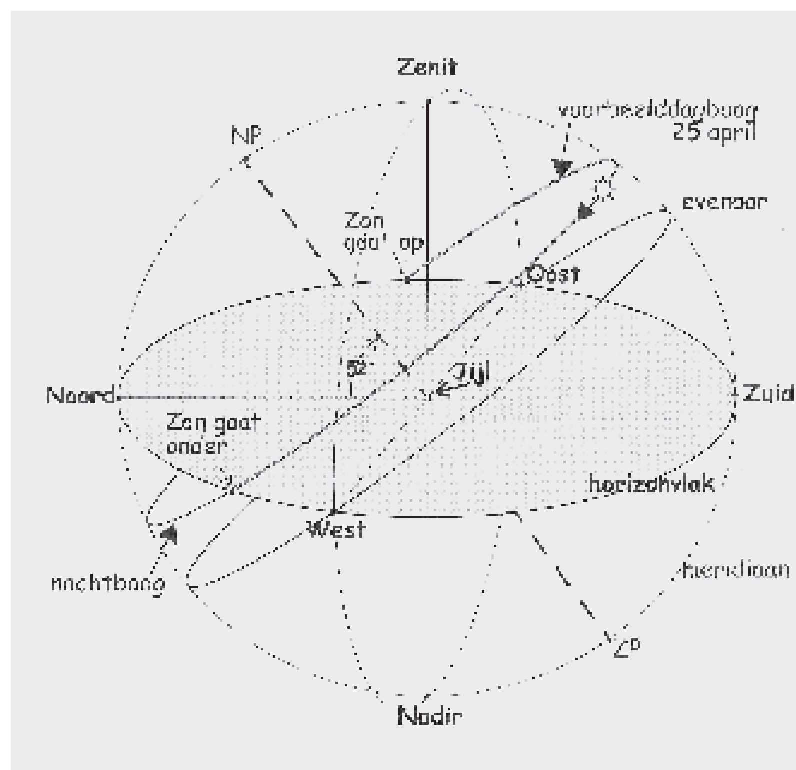
Daglengte

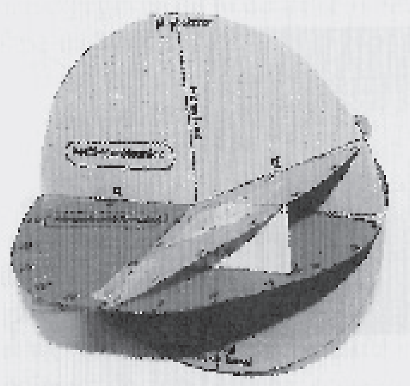
Volgens de ondertitel is het doel van het boekje het kunnen uitrekenen hoe laat de zon opkomt en ondergaat op een willekeurige dag op een willekeurige plaats op aarde. Het boekje bestaat uit drie delen, in deel I wordt begonnen met het bepalen van de daglengte. ***Figuur 1*** laat de hemelbol met de lezer in het middelpunt zien. Het horizontale vlak is de horizon, de snijpunten met de baan van de zon zijn de punten waar de zon opkomt, resp. ondergaat. De middelpuntshoek gevormd door deze punten bepaalt de daglengte. Door figuur 1 plat te leggen kan met meetkundig redeneren en rekenen (met name goniometrisch) deze hoek worden bepaald:

$$\cos\psi = -\tan\varphi \cdot \tan\delta$$

waarbij ψ de helft is van de betreffende middelpuntshoek, φ de noorderbreedte en δ de declinatie (de hoek tussen de richting van de zon en het evenaarvlak). Een eenvoudige formule, die echter niet geheel juist is: de zon is bijvoorbeeld geen punt. Hierdoor is een aanpassing met de zogenoemde kimduiking nodig. De afleiding van deze aangepaste formule is wat ingewikkelder en wordt daarom niet gegeven. Deel I wordt afgesloten met het bepalen van het tijdstip waarop de zon door het zuiden gaat: dat is het midden van de dag. Hierbij komen begrippen als oosterlengte, meridianen en tijdzones om de hoek kijken. Als de lezer nu voor een willekeurige dag ook nog de declinatie zou weten, dan zou hij of zij de zonsopkomst- en zonsondergangtijd kunnen berekenen.

figuur 1 De hemelbol





figuur 2 De sterrenbol van papier

Als de lezer nu voor een willekeurige dag ook nog de declinatie zou weten, dan zou hij of zij de zonsopkomst- en zonsondergangtijd kunnen berekenen.

Eclipticale lengte van de zon

Het bepalen van de declinatie komt in deel II aan de orde. Allereerst laat de schrijver zien dat de zon zich volgens een grootcirkel (de ecliptica) beweegt in de sterrenbol. Een papieren sterrenbol met daarin de ecliptica (***zie figuur 2***) is een uitstekend hulpmiddel om de berekening in dit deel goed te kunnen volgen. Hiermee wordt eerst de eclipticale lengte λ van de zon (de afgelegde hoek van de zon vanaf 21 maart langs de ecliptica) bepaald. Met het driehoekje in het model tussen het eclipticavlak en het horizontale evenaarvlak (zie nog eens figuur 2) kan vervolgens voor een willekeurig moment uit de eclipticale lengte de declinatie worden berekend. Ook hier wordt weer wat eenvoudige goniometrie gebruikt. Maar, net als in deel I, is de werkelijke gang van zaken weer net iets anders: λ en de doorgangstijd van de zon door het zuiden behoeven nog een correctie. Hiervoor is in het boekje een tabel opgenomen. Waarschijnlijk zijn de benodigde berekeningen ook nu te ingewikkeld, ze zijn niet in het boekje opgenomen.

Analemma

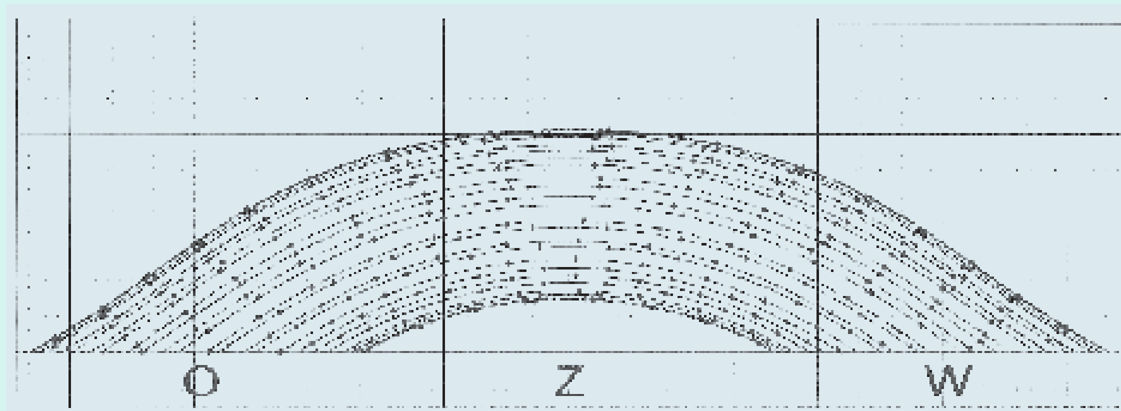
In deel III wordt gekeken naar de twee redenen voor de genoemde correctie. Allereerst staat de ecliptica scheef ten opzichte van de as van de sterrenbol, waardoor de zon soms achter en soms voor loopt op de verwachte positie. Dit verschil leidt tot een zogenaamd sferisch analemma: een symmetrische acht op de hemelbol. Daarnaast is ook de snelheid van de aarde om de zon niet constant (gevolg van de perkenwet van Kepler). Met behulp van de tabel achterin het boekje kan het sferisch analemma worden gecorrigeerd. Het ware analemma dat dan wordt geconstrueerd is ook goed te zien ***in figuur 3***, de illustratie waarmee het boekje eindigt: de baan van de zon aan de hemel op elke 1e en elke 15e dag. De stippen in dit plaatje geven de positie van de zon op ieder heel uur: een bundel analemma's.

Mooi, maar...

Het doel van het boekje, het berekenen hoe laat de zon opkomt en ondergaat, is zeker bereikt. Aan het eind van deel II kun je dat inderdaad berekenen. Je zou misschien een wat onbevredigd gevoel kunnen hebben over het feit dat aan het eind van de delen I en II correcties worden gegeven die wiskundig niet onderbouwd worden, maar wel wordt duidelijk aangegeven waarom deze correcties nodig zijn. Het boekje bevat een lijst met bronnen waarin de ontbrekende details te vinden zouden zijn.
De benodigde goniometrie is vrij basaal (gaat niet verder dan 'soscastoa'), maar voor het goed doorzien van hemelbol en dagbogen, eclipticavlak en sterrenbol is naar mijn mening de hulp van het bij het boekje horend extra materiaal voor veel leerlingen onontbeerlijk. Dit materiaal bestaat uit bouwplaten voor de papieren modellen op groot formaat (achterin het boekje zijn ze klein afgedrukt), een aantal Geogebra-bestanden en uitwerkingen bij alle opgaven (van enkele opgaven zijn de uitwerkingen in het boekje opgenomen).
Het is dan ook jammer dat op de website bij dit boekje – *www.epsilon-uitgaven.nl* – op het moment van schrijven (9 oktober 2012) de link naar het hulpmateriaal naar een lege pagina linkt. Gelukkig mailde de schrijver van het boekje mij desgevraagd direct het materiaal (waarvoor nogmaals dank).
Bij lezing van het boekje bekroop mij een aantal keren het gevoel dat de afwerking van het boekje beter had gekund: te vaak kwam ik bijvoorbeeld typefouten tegen. Jammer eigenlijk, het boekje verdient dat niet. Het onderwerp is, zeker voor leerlingen die geïnteresseerd zijn in sterrenkunde, een mooi keuzeonderwerp!

Over de auteur

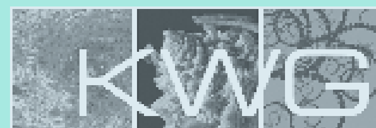
Ernst Lambeck is docent wiskunde aan het Newmancollege te Breda. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides* en voorzitter van de Nederlandse Opgavecommissie van de Kangoeroe.
E-mailadres: *elambeck@newmancollege.nl*



figuur 3 Zonnebanen voor elke 1e en 15e dag van de maand

AANKONDIGING /

Wintersymposium KWG 2013



Wiskunde ↔ Natuurkunde

Het Wintersymposium 2013 van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, te houden op zaterdag 5 januari a.s., heeft een thema dat eerbiedwaardig oud is, maar actueler dan ooit: het samenspel tussen wiskunde en natuurkunde.
Het onderzoek aan *ontladingen bij onweer* is sinds de experimenten van Benjamin Franklin rond 1750 aanzienlijk verder gekomen. Onder meer gammastraling uit onweerswolken en de productie van antimaterie in onweer zijn recente ontdekkingen die te danken zijn aan de enorme ontwikkeling van technologie, experimenteel en theoretisch onderzoek. Daarbij zijn analytische en numerieke wiskundige methodes onmisbaar.
Van de aarde bezien is de zon een veel rustiger onderwerp dan donder en bliksem. De optische verschijnselen die de natuurkundige Marcel Minnaert beschreef, zijn nog steeds actueel en wiskundig interessant. Er is een wiskundig verband tussen de verklaring voor de *blinde stroken* die soms waarneembaar zijn in de ondergaande zon en het probleem van de *brachistochroon* (de snelste weg van een deeltje tussen twee punten, waarvan de een hoger ligt dan de ander), door Johan Bernoulli eind 17e eeuw opgelost.
Op zo'n deeltje werkt alleen *zwaartekracht*, een onderwerp van onderzoek waar onder meer Galileo, Newton en Einstein onderzoek aan hebben gedaan en wiskundige modellen voor hebben ontwikkeld.
Die theorievorming gaat nog steeds door: nieuwe gegevens, uit ruimteonderzoek bijvoorbeeld, laten zien dat de modellen niet helemaal kloppen. Zo ontstaan nieuwe vragen en wordt er gewerkt aan nieuwe modellen.

Sprekers

- **Ute Ebert**, leidster van een onderzoeksgroep aan het Centrum Wiskunde & Informatica in Amsterdam en hoogleraar natuurkunde aan de TU Eindhoven, doet onderzoek aan ontladingen. Haar voordracht gaat over *Onweer – oude en nieuwe onverwachte verschijnselen boven onze hoofden.*
- **Henk Broer**, hoogleraar wiskunde, interdisciplinaire toepassingen van wiskunde (meteorologie, life sciences) en mathematische fysica aan de RU Groningen en wetenschappelijk directeur van het Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde & Informatica, doet onderzoek aan dynamische systemen. Hij laat u delen in zijn kennis over *Atmosferische optica rond de horizon en Bernoulli's brachistochroon.*
- **Erik Verlinde**, hoogleraar theoretische fysica aan de Universiteit van Amsterdam, winnaar van een Spinozapremie in 2011, werkt aan een nieuwe theorie van zwaartekracht. Zwaartekracht zou geen fundamentele kracht zijn maar het gevolg van verschillen in informatiedichtheid tussen twee lichamen en daarbuiten. Een revolutionair idee, waarover hij u meer vertelt in zijn presentatie *Een nieuwe kijk op de zwaartekracht.*

Datum, plaats, kosten

Het symposium wordt gehouden op **zaterdag 5 januari 2013** in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein 29, 3512 JE Utrecht).

Het programma start om 10:00 uur (koffie vanaf 9:30) en eindigt ca. 15:00 uur.

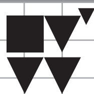
U wordt verzocht u van te voren *on line* aan te melden via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, *www.wiskgenoot.nl* (kies dan bovenaan 'wat doet het KWG' en vervolgens 'congressen en symposia'). Op de website is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden.

De kosten voor het symposium bedragen € 25,00 voor KWG-leden en € 30,00 voor niet-leden. Deze bijdrage is onder andere voor een lunch en consumpties gedurende de dag.

Inlichtingen

Nadere inlichtingen: Jenneke Krüger / e-mail: *jenneke.kruger@gmail.com* / telefoon: 06-16420445





Jaarrede 2012

[Marian Kollenveld]

Welkom

Dames en heren, hartelijk welkom, fijn dat u er weer bent.
En nog extra, want we hebben dan weliswaar inmiddels de intocht van Sinterklaas weten te omzeilen, vandaag had u ook naar een politiek congres kunnen gaan over het nieuwe regeerakkoord.
Maar gelukkig heeft u uw prioriteiten op orde en zit u gezellig hier bij ons, voor de tweede keer in het gastvrije Ichthus College. Modern, licht, en voldoende groot voor de komende jaren. Ik weet wel dat iemand met een beetje ambitie in Carré of Ahoy wil staan, maar wij vinden dit al heel sjiek – alles is prima verzorgd, we zijn al helemaal gewend. Bijzonder verheugend is – naast de gezellige aanwezigheid van al die bekende oude rotten – de toenemende belangstelling van studenten en LIO's te noemen; die laatsten volgen momenteel voor de derde keer een eigen LIO-programma, een soort kindernevendienst als ik zo oneerbiedig mag zijn. En ook de nieuwe leden zijn weer hartelijk welkom; een kleine 40 daarvan zijn aanwezig. We trakteren ze gewoontegetrouw bij de lunch op een vrolijk bubbeltje. Vooralsnog compenseert de aanwas van nieuwe leden het natuurlijk verloop van de gepensioneerden, maar hoe lang dat blijft is ongewis. In elk geval hopen we ze heel lang en vaak te zien, zo tot hun pensioen hadden we gedacht, maar later mag ook, dan krijgen ze weer korting. En dat is dan een échte korting, anders dan die in het woord pensioenkorting.

Regeerakkoord

Ja dat regeerakkoord, heeft u het gelezen? Mijn krant had het over -1 miljard en +0,9 miljard, maar schreef daarna heel optimistisch dat er op het onderwijs niet werd beknibbeld. Nou leek -0,1 me net wél onder beknibbelen vallen, dus ben ik maar even zelf gaan lezen, dat kan tegenwoordig heel makkelijk.

Laat ik wat citeren, selectief uiteraard:

- Onderwijs is de motor van de toekomst. Onderwijs en wetenschap in Nederland zijn van hoog niveau, maar onze ambitie reikt verder. Wij willen tot de top vijf van de wereld gaan horen. De kwaliteit van de man of vrouw voor de klas of in de collegezaal is daarbij van doorslaggevende betekenis.
- En die kwaliteit staat of valt met opleiding en selectie van leraren en van directeuren en bestuurders die hun medewerkers stimuleren, belonen en zo nodig sanctioneren.
- Dit zijn de mannen en vrouwen van wie we het moeten hebben: in hen willen we investeren. Zo kan onderwijs het beste uit kinderen en studenten halen. Talent meer uitdagen en achterstanden verkleinen, ook als je geboren bent in een migrantenfamilie, een gezin met een laag inkomen of deelneemt aan het speciaal onderwijs.
- Het belang dat wij hechten aan goed onderwijs, wordt onderstreept door het feit dat wij onderwijs buiten de bezuinigingen hebben weten te houden en er in deze crisistijd zelfs in investeren.

Nou, daarvan roep je toch spontaan hoera! Investeren en kwaliteit klinkt in elk geval aangenamer dan die lat die maar steeds omhoog moest, en het afrekenen. Maar er zijn ook wel wat flauwe grappen te maken: eindelijk expliciet aandacht voor de opleiding van schoolleiders. Het werd tijd, hoor ik u zeggen, en de vraag is daarbij wel of er dan verplicht of juist verboden wordt om een cursus beleggen voor beginners te volgen.
Maar het is wel een goede zaak, een goede schoolleider is een zegen voor de school. Ik heb zelf in mijn vrij lange onderwijscarrière zowel goede als slechte meegemaakt en ben daardoor zelfs een keer van school gewisseld omdat ik echt niet meer door één deur kon met die man. Ja eigenwijs, ik weet het, en híj wilde niet weg.

En verder is het wel te hopen dat ze een tijdje blijven zitten, want anders zijn, voor je het weet, de gratis schoolboeken die nu afgeschaft worden, weer aangeschaft en komt de maatschappelijke stage terug die verdwijnt nu we hem net een beetje hebben opgetuigd. Maar ja, dat heet daadkracht, en dat kan twee keer: eerst schaf je het daadkrachtig aan, en dan schaf je het daadkrachtig af. Die maatschappelijke stage moet overigens wijken voor de kernvakken, en u kent die vast wel.

Jammer wel dat de bapo verder wordt afgebouwd, maar dat was al een tijdje aan de gang. Dat heb je vaker met regelingen die gunstig zijn en duidelijk wat opleveren. Dankzij de vrije bapo-dag zijn er ongetwijfeld veel meer ouderen in staat om het langer vol te houden, en dat wordt steeds belangrijker nu iedereen langer door moet. Hopelijk wordt er een alternatieve regeling bedacht.

Ook positief vinden we het doorpakken op het register en de noodzaak – en zelfs op termijn verplichting – tot nascholing, met als voordeel dat de directie dat dus niet meer kan weigeren. Zoals u weet vinden we het heel belangrijk en eigenlijk vanzelfsprekend dat een eenmaal goed opgeleide leraar ook de mogelijkheid krijgt en benut om zijn bekwaamheid op peil te houden. Marianne Lambriex zal u straks weer informeren over de voortgang in het vakbekwaamheids-oftewel registerproject.

Vooralsnog is het regeerakkoord allemaal woorden op een rij, maar ach, een beetje erkenning voelt ook lekker. Natuurlijk moet je maar afwachten wat het allemaal oplevert. Een regeerakkoord kenmerkt zich altijd door veel dingen die niet uitgevoerd worden… U weet vast nog wel dat het huidige regeerakkoord ons allemaal een rooster zonder tussenuren beloofde? Nou en?

Laten we dus maar weer op aarde terugkomen: er zijn nog wel wat punten van aandacht.

De profielen in havo en vwo

De vernieuwingscommissie cTWO eindigt aan het eind van dit jaar, en is bezig met het afronden van haar werkzaamheden. U kunt

zich vandaag in diverse werkgroepen op de hoogte stellen: maakt u daar vooral gebruik van. Want, hoewel er gedurende het proces steeds leraren bij het werk betrokken zijn geweest, hebben we bij het ministerie bedongen dat aan de NVvW een reactie op de voorstellen zal worden gevraagd.
Laat u informeren en geef ons uw mening, zodat we mede namens u kunnen spreken. Wacht daar niet mee tot het – over een jaar of wat – tegenvalt om dan te zeggen: Waarom is mij niets gevraagd?, zoals ik al eens meemaakte. Er wordt u nú iets gevraagd. Een beetje professional is op de hoogte van de ontwikkelingen en praat mee over zijn vak. Grijp uw kans, daar is uw vereniging voor!
De vernieuwingscommissie heeft wel de programma's maar niet de structuur mogen aanpassen, en daardoor zijn er nog steeds de u wel bekende structurele problemen.
Ik loop ze kort even langs: de spagaat van wiskunde A als 'knecht van twee meesters' in een exact en een niet-exact profiel dat via NG toegang geeft tot exacte studies, maar inhoudelijk daar vaak tekort schiet.
Een uitgekleed wiskunde B dat eigenlijk te klein is voor een goed B-programma, en in het hbo – behalve bij de lerarenopleiding – nergens officieel vereist is.
Wiskunde D is inhoudelijk succesvol, maar vanwege de kleine groepen met kunst en vliegwerk en creatief enthousiasme in de lucht gehouden. Wiskunde C, in vwo eveneens vaak met kleine groepen en hetzelfde kunst en vliegwerk in combinatieklassen.
Havo C is nog in voorbereiding en zoals u wellicht weet is ons standpunt dat we tegen invoering zijn, om organisatorische redenen: nog meer kleine groepjes, de vrees voor een typisch meisjesvak, de onmogelijkheid om vanuit vmbo zonder wiskunde een havo-diploma te krijgen, en tenslotte vanwege de verplichting van een voldoende in combinatie met een verplicht halen van de rekentoets voor deze groep, die tot nu toe wiskunde kon mijden, en vaak met reden. De rekentoets leek ons voor deze leerlingen wel voldoende.

We hebben daar een eenvoudige oplossing voor bedacht, die we ook politiek verder willen uitdragen. De huidige versnippering is het gevolg van de forse reducties en ons verzet daartegen bij de PEP. Inmiddels is het politieke klimaat voor ons vak aanmerkelijk milder geworden.
Nieuwe rondes, nieuwe kansen.
In grote lijnen komt het hier op neer. We stellen voor de huidige versnippering op te lossen door terug te keren naar een eenvoudig model met twee robuuste vakken, aan de alfakant een samengaan van A en C, en aan de bètakant van B en D.
Daarmee los je het organisatorische probleem van de kleine groepjes voor de scholen op.
In het N-profiel is wiskunde B de standaard; exacte vervolgopleidingen krijgen dan zonder hun eisen te veranderen leerlingen met een betere en homogenere voorkennis, wat het succes van die leerlingen bevordert. En daarmee helpen we de collega's daar.
Wiskunde A kan uit de spagaat.
Dit zijn de hoofdlijnen, er zijn uiteraard nog allerlei details in de uitwerking mogelijk.

Het rekenen

Ja, dat rekenen houdt de gemoederen al enige tijd stevig bezig. We erkennen allemaal het probleem van de te geringe rekenvaardigheid, aan het eind van de basisschool – en ook nog teruglopend in het voortgezet onderwijs – en het ongemak dat leerlingen daar in hun verdere leven van kunnen ondervinden. We begrijpen ook dat de koninklijke oplossing – via het verbeteren van de rekenvaardigheid bij alle basisschooldocenten het rekenonderwijs op de basisschool weer op voldoende niveau krijgen – erg lang kan duren, en voor iedereen die nu al van de basisschool af is, zeker te laat komt, en dat er dan hoe dan ook onderhoud nodig is in het voortgezet onderwijs. En wel in meerdere vakken.
Onze bijdrage daaraan is tot nog toe ons eigen project RekenVOort en, met andere vakken, een project over rekenen in meerdere vakken: Rekenbewust vakonderwijs. En we hebben u geïnformeerd via *Euclides* en met een special van *Willem Bartjens* samen met de NVORWO.

De door de overheid gekozen oplossing om per 2014 al te gaan toetsen in de examenklas met mogelijke consequenties voor het diploma, brengt het gevaar met zich mee dat leerlingen worden afgerekend op onderwijs dat ze niet hebben genoten en hun docenten resultaatverantwoordelijk worden voor rekenonderwijs waar ze vaak weinig mee te maken hebben gehad. De strenge zak/slaagregeling maakt dat nog extra wrang.

Er wordt momenteel op veel scholen hard gewerkt aan het vormgeven van het rekenonderwijs. De resultaten van de eerste pilottoets wezen uit dat dat nog lang niet overal met voldoende resultaat was. We zijn erg benieuwd naar de resultaten van de komende pilot, en zullen dan zeker weer contact zoeken met de beleidsmakers. Want we hebben ook nog wel wat bezwaar tegen de manier waarop de toetsing momenteel is vormgegeven.
Het gedeelde doel is dat leerlingen weer voldoende rekenvaardig worden, maar daar hoort ook goed rekenonderwijs bij. En zoals u weet zijn we van mening dat dat niet gratis moet worden ondergebracht bij de wiskundelessen.

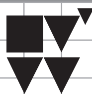
Rekenen voor vwo

Na de vaststelling van de diverse rekenniveaus en toetsen tot en met 3F was er nog discussie over de vraag of er voor het vwo niet eigenlijk een niveau 3S meer geschikt zou zijn, met meer verbreding en verdieping. Omdat in het vwo wiskunde voor elke leerling verplicht is, werd dit beperkt tot rekenen. Daartoe is een commissie gevormd die onlangs haar conceptverslag heeft voorgelegd aan het veld. Het bestuur heeft veel waardering voor het werk dat door de commissie is verricht, wat heeft geresulteerd in een helder en goed leesbaar rapport. Naar het oordeel van het bestuur, mede gebaseerd op het advies van de Werkgroep HAVO/VWO, blijkt daaruit niet die mogelijke meerwaarde en verdieping ten opzichte van 3F, en we hebben dit daarom als reactie naar de commissie gestuurd en afgeraden om 3S in te voeren.

De toetswind waait

Naast de rekentoetsen met consequenties komen er toetsen van tussendoelen aan het eind van de onderbouw – gelukkig alleen diagnostisch – maar dat maakt duidelijk dat de toetswind sterk zal opsteken.
Die nieuwe aandacht voor kwaliteit zal dat vast niet snel ongedaan maken. Vanuit het oogpunt van de overheid begrijpelijk; het





is een van de weinige instrumenten die ze kunnen inzetten. En er is niets tegen toetsen, maar toetsen en examineren mag nooit ten koste gaan van het leren van de leerling, waar het ons toch allemaal om te doen is. En zeker bij een louter digitale toetsing ligt het gevaar op de loer dat je niet weet wat je toetst. We hebben hier bij OCW ook op gewezen, en we gaan daar binnenkort weer verder over spreken.

En soms is er wind mee

We praten wat af, maar soms heeft al dat praten ook succes: de werkwoordenlijst van het Nomenclatuurrapport van de NVvW, dat al tijden informeel heel gezaghebbend was, wordt nu officieel overgenomen in de syllabus van 2014 van het lopende examenprogramma, met voorafschaduwing in 2013. U leest dat in een komende *Euclides*.

Euclides

Die naam is al eerder gevallen. Dit jaar konden we u als kadootje een mooie special geven over getallen, die het ook los in de boekenkast aardig doet, en dus niet op het stapeltje weg te gooien tijdschriften hoeft. Die special was het afscheidskado van Klaske Blom bij haar vertrek als hoofdredacteur. We waren er erg blij mee en hebben haar dus hartelijk bedankt, inderdaad met een kadootje.
Marjanne de Nijs, die Klaske heeft opgevolgd, heeft haar eerste vuurproef als hoofdredacteur goed doorstaan naar onze mening.
We hopen dat u ook nog steeds het blad graag uit de wikkel haalt. Om dat ook zo te houden en de communicatie met u wat op te fleuren en te moderniseren hebben we vergaande plannen voor een restyling van het blad en de website. Denkt u daarbij aan automatisch aanmelden en betalen, directe mail met interessant nieuws voor leden, voorproefjes uit *Euclides*, apps, mogelijkheden tot reactie. We denken dat het heel mooi en volstrekt eigentijds zal worden.
Met ingang van het schooljaar 2013/14 zou u de resultaten kunnen zien. Dus, mochten er leden zijn die willen dienen als klankbordgroep, dan kunnen ze zich bij ons melden. Contactpersoon namens het bestuur hiervoor is Johan Gademan of natuurlijk onze secretaris.

Visie

Het bestuur is na een dagje op de hei ook bezig aan een nieuwe visienota, waarin een en ander gestalte zal krijgen. Waren we de afgelopen jaren bezig met het terugpakken van het vak en dus veel naar buiten gericht, in de toekomst verleggen we de focus een tikje meer richting goede wiskunde docenten voor goed wiskunde onderwijs, dus meer naar binnen.
De vernieuwde website zal die gewenste tweezijdige communicatie ook meer mogelijk maken. Ook daar hoort u ongetwijfeld meer over, en ook daar wordt u van harte uitgenodigd om mee te praten.

Een kort rondje langs de velden

Hbo – De Werkgroep HBO heeft een interessant congres gehouden met als titel: Wat willen we met wiskunde op het hbo? In de komende *Euclides* vindt u daarvan een verslag.[1]
Komend jaar zal de werkgroep een strategienota opstellen teneinde de problematiek in het hbo in een bètabrede visie samen te vatten. Als dat lukt, is dat een prestatie van formaat. En dan zult u dat zeker horen.

Wiskunde D – Vanuit de PWN-onderwijscommissie is een jaar geleden een groepje opgestart om wiskunde D-modules te certificeren. Iedere module wordt beoordeeld door iemand uit het hoger onderwijs en door twee vo-docenten, waarbij minstens één het ook echt moet uitproberen. Het certificeringsproces is opgestart, maar we willen er graag wat meer vaart in brengen. Daarom zijn we op zoek naar docenten die een module willen beoordelen en uitproberen. Meld u aan!

Federatie onderwijsbonden – Zoals u weet zijn we al een paar jaar lid van de Federatie Onderwijsvakorganisaties (FvOv), die weer is aangesloten bij de CMHF – daar dankt u mede uw prettig lage contributie aan. In de financiële stukken kunt u zien dat we met de contributie alleen het blad zouden kunnen betalen. Al een jaar is Dick Ottenbros daar onze vertegenwoordiger, die een ruime ervaring heeft in de medezeggenschap. Het is redelijk gespecialiseerd terrein, niet ieders kopje thee.
We komen daarom graag in contact met leden met belangstelling op dit terrein voor een nieuw op te richten werkgroep vakbondszaken om Dick wat te ondersteunen in zijn werk voor de vereniging. Meld u bij de secretaris.

Rechtspositie – Het afgelopen jaar hebben wederom maar weinig mensen gebruik gemaakt van de individuele rechtspositionele helpdesk. Als dat is uit onbekendheid, is dat jammer: u kunt er namelijk ook terecht voor vragen, u hoeft niet te wachten tot u ontslagen dreigt te worden. Maar als dat is omdat er inderdaad weinig problemen zijn, is het natuurlijk heel plezierig.
Het gevolg is wel dat het bestuur besloten heeft het risico in eigen beheer te nemen; onze penningmeester zal dat straks nader toelichten.

Historie – Harm Jan Smid heeft met grote vasthoudendheid verder gewerkt aan het archiveren van de verzameling ‘schoenendozen’ met daarin het papieren verleden van de vereniging, dik 80 jaar aan allerhande papieren en papiertjes.
We hebben voor dit archief inmiddels een goede plek gevonden in Haarlem, in het Noord Hollands Archief, waar ook andere wiskundearchieven zijn opgeslagen, waaronder dat van het Wiskundig Genootschap. Daar is een echte schatplaats voor historici van het wiskundeonderwijs ontstaan.
We zijn Harm Jan erg dankbaar voor zijn inspanning en zijn dan ook verheugd u te kunnen melden dat de Historische Kring van het Reken- en WiskundeOnderwijs (HKRWO), waarvan hij voorzitter is, per vandaag is toegetreden tot de vereniging in de vorm van een permanente werkgroep met de mooie naam Werkgroep Geschiedenis Reken-WiskundeOnderwijs, WGRWO.[2]
Dat betekent onder meer dat er nu op de site een eigen historisch hoekje is gereserveerd, dat u in *Euclides* regelmatig artikelen zult kunnen lezen, en een workshop of bijeenkomst kunt bezoeken.
En u kunt lid worden natuurlijk!

Het mooie van dat vers opgedane historisch besef is dat we ons realiseerden dat het 90-jarig jubileum er al snel aankomt. Vandaar dat we vanaf nu gaan reserveren voor een feestje en ook mensen nodig hebben voor een feestcommissie. Dit is alweer een oproep, inderdaad.

Wat doen we nu?

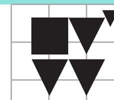
Het is de gewoonte om u in deze rede mee te nemen langs een aantal activiteiten. Het leek ons dit jaar wel aardig om u nu eens een min of meer totaal overzicht te geven. U vindt het in het begin van het programmaboekje.
Enerzijds kunt u zo nog eens nalezen wat we zoal doen en anderzijds is dit een uitnodiging om u aan te melden om actief te worden en ergens aan mee te gaan doen. Daarom is er steeds een bestuurslid of contactpersoon vermeld.
Zoals u ziet houden we een kleine 60 ballen in de lucht, dus kunnen we best hulp gebruiken. En om die positie te kunnen behouden hebben we ook veel actieve en nieuwe leden nodig.

U merkt dat de vereniging – ondanks die hoge leeftijd – nog steeds midden in het wiskundeleven staat. Het bestuur zal zich blijven inzetten voor het waarborgen en versterken van de positie van het vak wiskunde en van de wiskundeleraar in het voortgezet onderwijs, om ook het werk voor de wiskundeleraar werkbaar te maken en te houden.
Een bestuur kan al die ontwikkelingen en activiteiten nooit alleen aan. We zijn trots op al die mensen in de vereniging die zich voor de goede zaak willen inzetten.
We hebben elkaar nodig, samen staan we sterker. Ik wil dus graag besluiten met alle vrijwilligers hartelijk te danken voor hun inzet. En ik wens u en ons een goede toekomst met veel mooi wiskunde onderwijs.

Enne… Volgt u ons al op Twitter? Dan bent u niet alleen: de stand is 300.
Dank u wel.

Noten (red.)

[1] Zie pag. 129 in dit nummer.
[2] Zie ook artikel hiernaast.



Wat willen we met wiskunde op het hbo ?

[Roel van Asselt en Christiaan Boudri]

Samenvatting – Aanleiding, verslag en vervolg van de conferentie van 19 april 2012 met als doel een verbetering en versterking van het wiskundeonderwijs aan onder meer het technisch hbo.

Achtergronden

De laatste jaren worden de geluiden steeds sterker dat de technische beroepspraktijk (industrie, ingenieursbureaus, overheidsdiensten) onvoldoende aan goed opgeleide technici kan komen. Zo werden in het tv-programma Tegenlicht van 7 november 2011 verscheidene bedrijven uit de technologische industrie bezocht door Jan Kamminga, werkgeversbestuurder voor de technologische industrie. Schrikbarend was de boodschap dat veel bedrijven momenteel hun toevlucht nemen tot de import van ‘kenniswerkers’ uit China en India.
Als Landelijke Werkgroep HBO-Wiskunde (LWHW) vermoedden we dat er een verband bestaat tussen deze ontwikkeling en de kwaliteit en de kwantiteit van het wiskundeonderwijs in het secundair en tertiair onderwijs.
Om deze reden hebben wij een conferentie gehouden met als doel verbetering en versterking van het wiskundeonderwijs aan onder meer het technisch hbo. Over de aanleiding, uitkomsten en vervolgstappen van die conferentie gaat dit artikel.

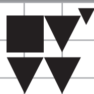
Aansluiting vo-hbo en mbo-hbo

Sinds de oprichting van de LWHW in 1999 hebben we ons sterk ingezet voor een verbetering van de aansluiting van het hbo op het vo en op het mbo (zie ook het achtergronddocument ‘Wiskunde aan het HBO 1999-2011’; zie noot [1]). Het gaat hierbij vooral om technische en economische opleidingen. Deze inzet is ook op dit moment nog heel hard nodig. Denk aan de ongelukkige beslissing in 2007 om wiskunde-B niet verplicht te stellen voor de ‘zwaardere’ technische studies, de beslissing om een mbo’er op niveau BOL4 toe te laten op elke hbo-vervolgstudie, de sterke vermindering van doorstroomrelevante kennis en vaardigheden door de invoering van competentiegericht onderwijs op het mbo, de voorgenomen reductie van het mbo-onderwijs van 4 naar 3 jaar, de klachten van mbo-leerlingen dat zij op niveau 4 te weinig worden uitgedaagd, enzovoort.
Toch zijn er ook lichtpuntjes: het vernieuwde programma voor wiskunde-B op het havo geeft een duidelijke verbetering van de aansluiting op het technisch hbo, er zijn verschillende regionale samenwerkingsverbanden ontstaan tussen hbo-opleidingen en ROC’s om passend doorstroomonderwijs te creëren, enzovoort.
Een succes van de LWHW-inzet is de ontwikkeling van de kennisbasis wiskunde voor de aansluiting mbo-technisch hbo, die door de HBO-raad wordt ondersteund; deze kennisbasis kan een belangrijke rol spelen bij de onderlinge afstemming van het onderwijs op mbo en hbo.

Doel van wiskunde op het hbo

Maar praten over aansluiting heeft geen zin als je niet weet waar je naar toe wilt. En





voor het hbo is dat de beroepspraktijk. We vonden het vorig jaar daarom tijd om de andere kant van het spectrum te belichten: welke rol spelen wiskundige vaardigheden en wiskundige denkactiviteiten in de huidige en toekomstige beroepspraktijk? Anders gezegd: *Wat willen we met wiskunde op het HBO?* Met dit uitdagende thema hebben we in het afgelopen voorjaar een landelijke conferentie georganiseerd met als doel na te gaan hoe het wiskundeonderwijs aan onder meer het technisch hbo kan worden verbeterd. De conferentie is gehouden op 19 april jl. in Utrecht, en was drukbezocht, door vooral hbo-docenten, maar ook enkele mbo- en vo-docenten waren aanwezig.
Op de conferentie hebben we de vraag als uitgangspunt genomen, welke rol wiskundige vaardigheden en wiskundige denkactiviteiten spelen in de beroepspraktijk van h(b)o-afgestudeerden (techniek, economie en landbouw). Vervolgens hebben we gefocussed op de vragen, hoe we hiermee de doorlopende leerlijnen in het hbo van instroom tot uitstroom naar het beroepenveld kunnen verbeteren, en welk wiskundeonderwijs daarvoor van belang is. Hiermee sloot de conferentie aan bij de discussie over de vraag hoe we de huidige hoogwaardige kenniseconomie in Nederland kunnen vasthouden in de concurrentie met opkomende economieën. Vanuit de technologische industrie horen we immers geregeld dat er een dreigend tekort is aan 'kenniswerkers', dus aan mensen die voor de daadwerkelijke innovatie moeten zorgen. De industrie vult dit tekort deels aan met mensen uit China en India, en ervaart dat hbo-afgestudeerden steeds meer achterstand oplopen in vergelijking met het kennis- en werkniveau van studenten in deze landen.[2]

Onderzoek

Ter voorbereiding van de conferentie is in opdracht van de LWHW een onderzoek onder 13 bedrijven in Nederland uitgevoerd met als richtvragen de bovengenoemde vraagstelling en de aangegeven hypothese.[3] Op de conferentie is een inleiding gehouden over het onderzoeksresultaten door Roel van Asselt (oud-lector Saxion Hogescholen).[4] Daarnaast heeft Wil Schilders (directeur van het Platform Wiskunde Nederland) een inleiding gegeven over trends in het wiskunde- en ict-gebruik in het beroepenveld en de effecten daarvan op de vereiste vaardigheden en wiskundige denkactiviteiten van hbo-ingenieurs.[5]
De conclusies en aanbevelingen uit het onderzoek en de aangegeven trends in het beroepenveld zijn voorgelegd aan de deelnemers van de conferentie. Er zijn op de conferentie conclusies getrokken en aanbevelingen opgesteld.
Wiskundedocenten hebben in werkgroepen gereflecteerd op de plenaire inleidingen en bijgedragen aan het aanscherpen en aanvullen van de voorliggende conclusies en aanbevelingen.[6]
De uitkomsten van de conferentie zijn in de maanden juni en augustus nog eens voorgelegd aan de deelnemers via een internetforum.[7]

Aanbevelingen

We geven hierbij een bloemlezing van de aanbevelingen die geadresseerd zijn aan de afzonderlijke *stakeholders*, waarin tevens de conclusies van de conferentie doorklinken.[8]

Aanbeveling aan het beroepenveld

- Vraag via uw branche-organisatie meer aandacht bij de Nederlands Vlaamse Accreditatieorganisatie, bij OCW en bij de HBO-raad voor de problemen die er op dit moment zijn in de wiskundekennis en vaardigheden, mede in relatie tot onze internationale concurrentiepositie.

Aanbevelingen aan de HBO-raad en OCW

- Stimuleer hogescholen om het niveau van het technisch hbo-onderwijs (weer) op adequaat niveau te brengen en voorkom dat het hbo in het stelsel de positie van het mbo van 20 jaar geleden overneemt.
- Pas de toelatingsvoorwaarden voor vo-leerlingen zo aan dat een gewenst minimaal wiskunde niveau in technische hbo-opleidingenkan worden bereikt.

Aanbevelingen aan de hogescholen

- Zorg voor goede voorlichting aan havisten en mbo'ers over de werkelijke eisen die in de verschillende opleidingen worden gesteld in plaats van alleen te refereren aan de huidige landelijke, formele hbo-toelatingseisen.
- Zorg voor een betere beheersing van basisvaardigheden door meer continuïteit in oefening en onderhoud ervan, bijvoorbeeld in toepassingsvakken en beroepsgerelateerde contexten.
- Zorg voor een adequaat wiskundeniveau dat voldoende is om een juiste inzet en interpretaties in computersimulaties, ICT-oplossingstools en statistische rekenprogramma's mogelijk te maken.
- Maak differentiatie in wiskundeniveaus mogelijk naar functieprofiel, bijvoorbeeld in de hoofdfase van de hbo-opleidingen waarin keuzes gemaakt worden in verbreding en/of verdieping van wiskundige technieken en denkactiviteiten.

Aanbevelingen aan wiskundedocenten

- Zorg voor een goede interactie, samenwerking en afstemming van het wiskundeprogramma met de technisch/theoretische vakken en de beroepsvorming.
- Geef bij het (in het beroepenveld zeer wenselijk geachte) onderwerp statistiek, meer aandacht aan het leren omgaan met software en het interpreteren van uitkomsten van statistische rekenprogramma's.
- Gebruik een afwisseling van werkvormen om de algebraïsche en meetkundige basisvaardigheden beter te laten beklijven.

Vervolg

Hoewel we met de conferentie het hele hbo wilden omvatten (voor zover wiskunde daarin een belangrijke rol speelt), richtte het onderzoek zich uit praktische overwegingen alleen op de Technische sector. Een voor de hand liggend en zinvol vervolg ligt dan ook in een uitbreiding van het onderzoek naar de sectoren Economie en Agrarische sector. Op de conferentie en in de onderzoeken bleken de problemen bovendien breder te leven dat alleen in de wiskundediscipline



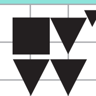


foto 1 Enkele deelnemers

zelf. De problematiek van het wegzakken van wiskundige kennis en vaardigheden werkt door in andere bètadisciplines en speelt dus bètabreed.
Mede om die reden hebben we besloten op basis van de uitkomsten van de conferentie een strategienota op te stellen. Daarin beginnen we met een analyse van de problemen die in het beroepenveld leven en de dilemma's waarvoor hogescholen staan. Deze problemen en dilemma's koppelen we aan de ontwikkelingen in het vo (de nieuwe examenprogramma's en de rekentoets), en het mbo (verkorting van nominale studieduur, ontwikkelingen op het gebied van doorstroomprogramma's, kennisbasis wiskunde), om te komen tot een visie op een integrale aanpak van de wiskundeleerlijn in het hbo. Daarmee wordt ook de vraag uit de titel van het symposium beantwoord. We verwachten de strategienota eind 2012 gereed te hebben. De nota zal worden aangeboden aan de HBO-raad, de individuele hogescholen en OCW.

Noten

[1] J.C. Boudri: *Achtergronddocument 'Wiskunde aan het HBO 1999-2011'*. Arnhem: 29 november 2011; zie NVvW-site.
[2] Zie onder meer 'Nederland buiten kennis'; regie Kees Brouwer (Uitzending Tegenlicht, 7 november 2011).
[3] R. van Asselt: *Onderzoeksrapport Wiskunde in het technisch beroepenveld*. LWHW, 2012; zie NVvW-site.
[4] R. van Asselt: *Presentatie bij de conferentie 'Wiskunde 2.0'*. Op 19 april 2012; zie NVvW-site.
[5] W. Schilders: *Presentatie bij de conferentie 'Wiskunde 2.0'*. Op april 2012; zie NVvW-site.
[6] Zie de verslagen van de verschillende workshops en de plenaire discussie op de NVvW-site.
[7] Reacties binnengekomen via het HBO-forum Wiskunde 2.0, en via email.
[8] Conclusies en aanbevelingen Conferentie Wiskunde 2.0 (LWHW 2012); zie NVvW-site.

De documenten op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl*) zijn te vinden via: Navigatie / Werkgroepen / Werkgroep-HBO / conferentie 2012
Of direct via: *www.nvvw.nl/page.php?id=8906*

Over de auteurs

Roel van Asselt was onder meer lector Instroommanagement en aansluiting op Saxion Hogescholen, en directeur van het Landelijk Informatie- en Expertisecentrum Aansluiting HBO (LICA). Op dit moment is hij lid van cTWO en werkt hij als zelfstandig adviseur in onderwijszaken.
E-mailadres: *r.v.asselt@ziggo.nl*
Christiaan Boudri is docent bij de faculteit techniek aan de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen, en is voorzitter van de Landelijke Werkgroep HBO-wiskunde, bestuurslid van de NVvW en lid van cTWO.
E-mailadres: *Christiaan.Boudri@han.nl*

RECREATIE

PUZZEL 88-3

Simpele sommen

[Wobien Doyer en Lieke de Rooij]

Nu er weer meer aandacht is voor rekenvaardigheden komen we hopelijk minder systematische fouten tegen. Soms geven die verkeerde rekentechnieken toch een goed antwoord en 'lijkt' het rekenen simpel. ***In tabel 1*** ziet u enkele van dergelijke opgaven waar u er meer aan moet toevoegen. 6

Rekenvoorbeeld

I) $62^2 - 15^3 = 622 - 153 = 469$

II) $\dfrac{6\not{5}\not{4}}{\not{5}\not{4}5} = \dfrac{6}{5}$

III) $\dfrac{33}{58} \times \dfrac{88}{87} = \dfrac{3388}{5887} \left(= \dfrac{484}{841} \right)$

Bereken nu zelf:

a. ......

b. ......

...

tabel 1

Type I (zie tabel 1) – De kleine cijfertjes zingen een toontje lager.
Het aantal mogelijkheden waarbij niet beide exponenten groter zijn dan 2 zoals in het voorbeeld, blijkt zeer schaars te zijn. Dat vragen we dan ook niet, hoewel we het wel leuk vinden als u nog een of meer voorbeelden kan vinden.

Opgave 1

a. Vindt van type I alle mogelijkheden waarbij de exponenten beide 2 zijn, dus het verschil van twee kwadraten.
b. Bepaal voor type I een recept om oneindig veel opgaven te maken waarbij de exponenten respectievelijk 1 en 0 zijn.

Type II – Gelijke cijfers worden tegen elkaar weggestreept. Let wel dat de uitkomst eenduidig moet zijn. Bij het gegeven voorbeeld staan er twee vijven in de noemer, maar het maakt hier niet uit welke 5 je wegstreept. Als dat wel het geval is, dan keuren we die opgave niet goed. Er moet uiteraard wel iets overblijven in teller en noemer.

Opgave 2

a. Bepaal zo veel mogelijk opgaven van type II, waarbij teller en noemer elk uit twee cijfers bestaan, uiteraard niet beginnende met een 0. Beschrijf een methode om deze opgaven te vinden (anders dan door alle mogelijkheden te proberen).
b. Van de twee-cijferige opgaven van vraag a zijn oneindig veel meer-cijferige opgaven te vinden. Geef één of meer recepten om er zoveel mogelijk te bepalen.

Type III – $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{bd}}$, waarbij

$a, b, c, d, \overline{ac}$ en $\overline{bd}$ positieve gehele getallen voorstellen, met $a \neq b$ en $c \neq d$. De streep boven twee of meer getallen betekent hier dat die getallen achterelkaar worden geplakt (concatenatie).

Opgave 3

Bepaal zo veel mogelijk opgaven van type III, waarbij a, b, c, $d < 10$, en beschrijf ook hier weer een methode om ze te vinden.

Inzenden oplossingen

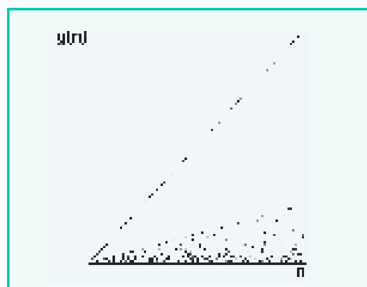
Oplossingen kunt u mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of per gewone post opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen.
Stuur vooral ook uw oplossing in als u maar een deel van de opgaven heeft gemaakt.
U kunt extra punten verdienen door bruikbare ideeën voor een nieuwe puzzel in te sturen.
De persoon die het hoogst op de ladder staat, ontvang een boekenbon ter waarde van 20 euro.
De deadline is **15 januari 2013**. Veel plezier.

OPLOSSING VAN 88-1

Proniks delen

We moeten beginnen met iets recht te zetten. In de opgaven hebben we de stelling: 'In iedere rij $ak + b$ met ggd$(a, b) = 1$ zijn er oneindig veel k waarvoor $ak + b$ priem is", toegeschreven aan Dirac. Dat berust op een misverstand. De stelling is van Dirichlet. Onze excuses.

Deze puzzel ging over pronikgetallen, natuurlijke getallen van de vorm $k(k + 1)$.
Er was ook gedefinieerd: $k(n)$ is het kleinste pronikgetal deelbaar door n en $g(n) = k(n)/n$.
De opdracht was om de merkwaardige structuur van de grafiek van $g(n)$ ***in figuur 1*** te analyseren.



figuur 1

Er kwamen 11 oplossingen binnen, waarvan 4 foutloos en volledig.
In de eerste twee opgaven werd gevraagd naar de bovenste twee lijnen.
Opgave 1 – Voor elke waarde van n is er een pronik $(n – 1)\cdot n$. Dus geldt voor elke n: $g(n) \leq n – 1$.
De gelijkheid geldt alleen als n een (macht van een) priemgetal is ($n = p^m$, met $m \geq 1$).
Dat zijn dus de punten op de bovenste lijn: $g(n) = n – 1$. Alle inzenders hadden deze vraag goed opgelost.

Opgave 2 – De lijn daaronder is de lijn $g(n) = (n – 2)/4$. Als $n = 2p^m$, met $m \geq 1$ én $p > 2$, geldt $k(n) = (p^m – 1)p^m$ en $g(n) = (p^m – 1)/2 = (n – 2)/4$. Dus dat zijn de punten van de tweede lijn.

Opgave 3 – De grafiek suggereert dat het hele gebied tussen deze twee lijnen leeg is. Toon aan dat inderdaad voor alle andere waarden van n geldt: $g(n) < (n – 2)/4$, of nog beter, scherp deze grens zo mogelijk aan.

Uitwerking – In alle overige gevallen ($n \neq p^m$ of $2p^m$) is n deelbaar door twee of meer verschillende priemgetallen groter dan 2. We kunnen dan n schrijven als $n = r \cdot s$ met ggd$(r, s) = 1$ en $r, s > 2$. Voor alle a in $\{1, 2, \ldots, s\}$ neemt $a \cdot r \pmod s$ dan alle waarden 1 t/m s aan. Er zijn dus 2 verschillende waarden a_1, a_2 in $\{1, 2, \ldots, s\}$ en waarden b_1 en b_2, waarbij $a_1 \cdot r = b_1 \cdot s + 1$ en $a_2 \cdot r = b_2 \cdot s – 1$. Dus is $(a_1 + a_2) \cdot r = (b_1 + b_2) \cdot s$. Omdat s geen deler is van r (ggd$(r, s) = 1$), moet s deler zijn van $a_1 + a_2$.
Verder geldt: $a_1 + a_2 < 2s$, zodat $a_1 + a_2 = s$, en dus is één van beide $< s/2$. Er is dus een $0< a < s/2$ (of $a \leq (s – 1)/2$) en een b (> 0) met $a \cdot r = b \cdot s \pm 1$.
Dan geldt omdat $r > 2$:

$$b = \frac{ar \mp 1}{s} \leq \frac{(s-1)\cdot r \mp 2}{2s} = \frac{r}{2} - \frac{r \pm 2}{2s} < \frac{r}{2} \leq \frac{r-1}{2}$$

Verder is $a \cdot r \cdot b \cdot s$ een pronikgetal (immers $a \cdot r = b \cdot s \pm 1$), en dat pronikgetal is deelbaar door $r \cdot s = n$. We hebben dus: $g(n) \leq ab \leq (s – 1) \cdot (r – 1)/4 = (s \cdot r – r – s + 1)/4 = (n + 1 – (r + s))/4 < (n – 2)/4$ want natuurlijk is $r + s > 3$.
Scherpere grenzen kunnen worden gevonden door een scherpere minimum afschatting van $r + s$. De scherpste bovengrens van $g(n)$ werd gevonden en bewezen door **Pieter Kop Jansen**:
$(r + s)^2 = (r – s)^2 + 4rs = (r – s)^2 + 4n \geq 4(n + 1)$
en dus $r + s \geq 2\sqrt{(n + 1)}$ zodat geldt: $g(n) \leq (n + 1 – \sqrt{(n + 1)})/4$, die nog kan worden verbeterd door naar beneden af te ronden.
Hans Klein gaf een grens die hier heel dicht bij komt: de naar boven op gehelen afgeronde waarde van $(n – 2\sqrt{n})/4$. Beide grenzen worden bereikt voor $n = PQ$ met P en Q machten van twee verschillende priemgetallen en $|P – Q| = 2$, dus voor bijvoorbeeld n = product van priemtweelingen of $n = 25 \times 27$.
Meerdere inzenders gaven antwoord op de extra opgave, waarbij werd gevraagd naar andere lijnen die in de grafiek zichtbaar zijn. Zij vonden o.a. voor $n = 3p^m$ (met weer p priem en $m \geq 1$) en ggd$(3, p) = 1$, zodat $p^m \equiv \pm 1 \pmod 3$, dus er is een getal q met $p^m \pm 1 = 3q$.
We hebben dan een pronikgetal $3q \cdot p^m$, en wel het kleinste pronikgetal deelbaar door n.
Er geldt dan $g(n) = q = (p^m \pm 1)/3 = (n \pm 3)/9$. Dit zijn twee evenwijdige rechte lijnen met een verticale afstand van ⅔ van elkaar.
Dit is dicht genoeg bij elkaar om in de grafiek de suggestie van één lijn te wekken.
Iets dergelijks geldt voor $n = 4p^m$ en ook voor $n = 6p^m$.
Dat levert op: $g(n) = (n \pm 4)/16$ resp. $g(n) = (n \pm 6)/36$, dus weer 2 evenwijdige lijnen, ditmaal op een verticale afstand van ½, resp. ⅓. Voor andere waarden van a liggen de punten voor $n = a \cdot p^m$ niet allemaal op één (of twee) lijn(en).
Mogelijkheden voor verder onderzoek?

Opgave 4 – Toon aan dat de functie g alle gehele waarden > 0 aanneemt, en dat er bij iedere waarde c oneindig veel n met $g(n) = c$ zijn.
Uitwerking – Er geldt voor alle gehele c: ggd$(c, 1) = 1$. Als $p = ck + 1$ is priem, (en daaraan voldoen volgens Dirichlet voor elke c oneindig veel priemgetallen p), dan is $p \cdot ck = p(p – 1)$ een pronikgetal, en wel het kleinste pronikgetal dat deelbaar is door p en dus zeker het kleinste dat deelbaar is door pk.
Gevolg: $g(pk) = p \cdot ck/(pk) = c$.
Elke waarde c wordt dus oneindig vaak bereikt.
Er zijn dus op alle hoogten horizontale lijnen in de grafiek van $g(n)$, maar de punten erop liggen te ver uit elkaar om de lijnen in de grafiek zichtbaar te maken. De kleinste zijn uiteraard $g(n) = 1$ als n een pronikgetal is en $g(n) = 2$ voor n = driehoeksgetal.

Ladderstand

De top 10 van de ladder ziet er nu als volgt uit:

H. Linders	74	J. Remijn	49
H. Bakker	70	K. Verhoeven	44
K. v.d. Straaten	60	W. v.d. Camp	43
T. Kool	57	L. Pos	41
J. Verbake	53	G. Riphagen	38

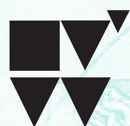
De volledige ladderstand is te vinden op de website van *Euclides* (*www.nvvw.nl/euclides.html*). Felicitaties voor de heer H. Linders. Hij ontvangt een boekenbon.

SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie:
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Forum op de NVvW-site:
www.nvvw.nl/forum.html

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
34. De Ster van de dag gaat op en onder

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-leraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*).
Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

jaargang 88

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	8 februari 2013	4 dec 2012
5	26 maart 2013	29 jan 2013
6	14 mei 2013	19 mrt 2013
7	25 juni 2013	29 apr 2013

zaterdag 5 januari, Utrecht
KWG Wintersymposium:
Wiskunde ↔ Natuurkunde
Organisatie KWG
Zie pag. 147 in dit nummer.

ma 21 jan t/m do 31 jan, op de scholen
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2013
Organisatie Stichting NWO
Zie ook pag. 143 in dit nummer.

di 22 jan t/m za 26 jan, Utrecht
Nationale Onderwijstentoonstelling
Organisatie VNU Exhibitions

maandag 28 januari, Utrecht
De 11e Wiskundeconferentie
Organisatie APS

do 31 jan en vr 1 feb, Utrecht
31e Panama-conferentie:
Rekenen-wiskunde op niveau
Organisatie FIsme

vr 1 en za 2 feb, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme

woensdag 6 februari, op de scholen
Onderbouw Wiskunde Dag
Organisatie FIsme
Zie pag. 140 in dit nummer.

maandag 11 maart, Utrecht
Studiemiddag: Rekenproblemen
Organisatie APS

donderdag 21 maart, op de scholen
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe
Zie ook pp. 125-126 in dit nummer.

vrijdag 5 april, Nijmegen
49e Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG en Radboud Universiteit

woensdag 17 april, op de scholen
Grote Rekendag
Organisatie FIsme